رسالة ماجستير بعنوان :

بعض الطرق العددية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني

إعداد: مبروكة غيث

منشورات البرنامج الوطني لتطوير المجلات العلمية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

الأكـــــاديمية الليبية

طرابلس – ليبيا

مـــــدرسة العلوم الأساسية

قسم الرياضيات

رسالة مقدمة لاستكمال متطلبات الحصول على الدرجة الأجازة العالية
(المـاجستير) في الرياضيات

بعنـــــوان

بعض الطرق العددية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من
النوع الثاني

Some Numerical methods for Solving Fredholm and Volterra integral equations of the second kind

اعـــــداد الطالبة: مبروكة الشارف مفتاح غيث

رقم القيـــد: 11360005

اشـــــراف الدكتور: البهلول عمار العباني

السنة الدراسية (2016-2017)

قرار لجنة المناقشة للطالبة

مبروكة الشارف غيث

للحصول على درجة الإجازة العالية في قسم العلوم الرياضية

قامت اللجنة المشكلة بقرار السيد وكيل الأكاديمية للشؤون العلمية رقم (2) الصادر بتاريخ 2017/01/09م ، بمناقشة الرسالة المقدمة من الطالبة مبروكة الشارف غيث لنيل درجة الإجازة العالية " الماجستير " في قسم العلوم الرياضية، وعنوانها:

Some Numerical Methods For Solving the Fredholm and Volterra integral Equations of the second Kind.

وبعد مناقشة الرسالة علنياً على تمام الساعة واحد ظهراً يوم الخميس الموافق 2017/02/09م بالقاعة رقم (2.6) بالمبنى رقم (04) بالأكاديمية وتقويم مستوى الرسالة العلمي والمنهج الذي اتبعته الطالبة في بحثها قررت اللجنة ما يلي:

قبول الرسالة ومنح الطالبة مبروكة الشارف غيث الإجازة العالية (الماجستير) في قسم العلوم الرياضية.

أعضاء لجنة المناقشة:		التوقيع	التاريخ
1.الدكتور البهلول عمار العباني	(مشرفاً)	....	2017/3/22
2.الدكتور إبراهيم محمد حسن	(عضواً ممتحناً)	....	2017/3/29
3.الدكتور إبراهيم عبدالله تنتوش	(عضواً ممتحناً)	....	2017.03.22

يعتمد

د. محمد سالم الليد

عميد مدرسة العلوم الأساسية/ المكلف

التوقيع: ....

التاريخ: 2017/4/2

د. حسين عبداللطيف الشريف

وكيل الأكاديمية للشؤون العلمية

2017/4/9

بسم الله الرحمن الرحيم

{اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ (1) خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ (2) اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ (3) الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ (4) عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ (5)}

صدق الله العظيم

سورة العلق: الآيات (1- 5)

الإهداء

إلى منارة العلم والعالمين إمام المرسلين سيدنا محمد سيد الخلق أجمعين الأمي الذي علم المتعلمين...إلى خاتم الأنبياء والمرسلين

((سيدي رسول الله))

إلى من كان السر في وجودي...إلى من كان له الفضل في دفعي إلى طريق النجاح

((أبي الحبيب))

إلى من سهرت على راحتي الليالي الطوال...إلى من كان رضاءها زاداً في الحياة

((أمي الحبيبة))

إلي من بذكرهم ينشرح صدري ويزيل همي...إلى من حبهم يسري في وجداني

((أخواتي وأخواتي))

إلى من كانوا لي سنداً في مشوار دراستي...إلى من وقفوا بجانبي لأصل معهم إلى بر الأمان

((أصدقائي وصديقاتي))

إلى الذين أناروا أمامي طريق العلم والمعرفة

((أساتذتي))

الشكر والتقدير

الشكر اولا" .....

لمن بسط الأرض ورفع السماء وبث فيهما الحياة واعطي العلم لمن يشاء وشاء للعلم أن يزين الحياة.

وبكل الحب والوفاء وبكل التقدير اتقدم بخالص الشكر والامتنان الي أ. د. المشرف على هذا البحث. **(البهلول عمار العباني)** لما بذله من جهد لإنجاز هذا البحث لكي يظهر على أحسن وجه.

كما أتقدم بكل الشكر والعرفان لكل أساتذة الرياضيات لما قدموه لي من معلومات طيلة أيام دراستي وأخص بالذكر منهم **د. علي الخير**.

قائمة المحتويات

قائمة الجداول

قائمة الأشكال

ملخص

في هذا البحث، قمنا بدراسة مفاهيم المعادلات التكاملية التي حلها له اهمية في العديد من التطبيقات العلمية وتصنيفها حسب نوع النواة التي الحل يعتمد عليها. كذلك دراسة علاقة هذه المعادلات بالمعادلات التفاضلية وتطبيق بعض الطرق التحليلية لإيجاد الحل الصحيح. حيث ان الطرق التحليلية اثبتت وجود ووحدانية الحل. كذلك تم تطبيق الطرق العددية لإيجاد الحل التقريبي باستخدام برنامج ماتلاب (MATLAB)، وتم إجراء تحليل الخطأ، حيث أظهرت النتائج التقريبية دقة وقُرب من النتائج التحليلية.

Abstract

In this research, we have studied the concepts of Integral Equations which solution his it is importance in many scientific applications. They have been classified according them to the nucleus type that this solution depends upon it. Also the relationship between these equations and the differential equations has been discussed, including the applying of some analytical methods to find the correct solution. The analytical methods have proved the existence and uniqueness of the solution. The application of numerical methods for finding the approximate solution with using the **MATLAB** software and error analysis were conducted, where the approximate results showed the accuracy and closeness to the analytical results.

مقدمة عامة

عندما تعقدت العلوم المختلفة نتيجة التداخلات بينها وتطورت بشكل رهيب وبدأ العلماء بدراسة الظواهر الطبيعية سواء كانت فيزيائية، كيميائية، بيولوجية أو هندسية كان للمعادلات التكاملية بمختلف أنواعها دوراً بارزاً في تفسير هذه الظواهر وإيجاد الحلول المختلفة لها سواء كانت تحليليه أو عددية.

هذا العمل يهدف إلى دراسة موضوع تطبيق بعض الطرق العددية لحل المعادلات التكاملية مثل معادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني. حيث اشتمل هذا العمل على أربع أبواب كما يلي:

الباب الأول: يتضمن هذا الباب ستة بنود. في البند الأول تم ذكر مقدمة عامة. وفي البند الثاني تم التطرق الي بعض التعريفات والنظريات الأساسية والتي ترتبط بباقي البنود الأخرى، وفي البند الثالث تم تعريف المعادلة التكاملية وذكر أنواعها سواء كانت خطية أو غير خطية، وفي البند الرابع تم تقسيم المعادلات التكاملية على أساس نوع النواة من حيث كونها متصلة أو غير متصلة. في البند الخامس تم استنباط معادلة فريدهولم من مسألة الشروط الحدية مع ذكر الأمثلة وفي البند الخامس تم استنباط معادلة فولتيرا التكاملية من مسألة القيمة الابتدائية بالإضافة الي عرض بعض الأمثلة.

الباب الثاني: يوضح هذا الباب بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني وهذا الباب ينقسم الي ستة بنود، في البند الأول تم ذكر مقدمة وفي البند الثاني تم التطرق الي طريقة النواة القابلة للفصل لحل معادلة فريدهولم التكاملية ثم عرضت بعض الأمثلة لتوضيح هذه الطريقة. وكذلك تم توضيح طريقة التقريبات المتتالية. وفي البند الثالث تم إثبات وجود ووحدانية الحل لمعادلة فريدهولم التكاملية، أما الفصل الرابع تم ذكر طريقة الحل المتسلسل وطريقة تحويل لابلاس لمعادلة فولتيرا التكاملية. وفي البند الخامس تم إثبات وجود ووحدانية الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية، أما البند السادس فقد تم توضيح القيم الذاتية والدوال الذاتية لمعادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا التكاملية.

الباب الثالث: في هذا الباب تم دراسة بعض الطرق العددية لمعادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني. هذا الباب يحتوي على ثلاثة بنود، في االبند الأول تم وضع مقدمة، وفي البند الثاني تم دراسة طريقة النواة القابلة للفصل وطريقة نيستروم. لحل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني، أما البند الرابع تم التطرق الي طريقة قاعدة شبه المنحرف وطريقة رانج كوتا لحل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

الباب الرابع: تم حل معادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني بالطرق العددية التي سبق ذكرها في الباب الثالث، في البند الأول حل معادلة فريدهولم والبند الثاني تحليل الخطأ بطريقة نيستروم لمعادلة فريدهولم التكاملية، أما البند الثالث حل معادلة فولتيرا التكاملية.

الباب الأول

مفاهيم أساسية

Fundamental concepts

الباب الأول: ـ مفاهيم أساسية

1-1 مقدمة

2-1 تعريفات ونظريات أساسية

3-1 أنواع المعادلات التكاملية

1-3-1 المعادلات التكاملية الخطية

2-3-1 المعادلات التكاملية غير الخطية

4-1 تصنيف المعادلات التكاملية بالنسبة للنواة

5-1 استنباط معادلة فريدهولم التكاملية

6-1 استنباط معادلة فولتيرا التكاملية

1 - 1 مقدمة

المعادلات التكاملية أهميتها الخاصة بين أفرع العلوم الرياضية المختلفة مثل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، التحليل الدالي، نظرية المؤثرات والمحولات والدوال الخاصة.

ولذلك يمكن القول "أنه لا يوجد علم من العلوم المختلفة إلا وتلعب المعادلات التكاملية دوراً بارزاً فيه" ولذلك نجد أن كثيراً من الباحثين استطاعوا استنباط كثيراً من الطرق المختلفة لحل المعادلات التكاملية سواء كانت النواة الخاصة بالمعادلة التكاملية متصلة أو غير متصلة. وهذه الطرق تتمثل في كونها طرق تحليلية أو عددية.

ومن المعلوم أن المعادلة التكاملية هي المعادلة التي تكون فيها الدالة المجهولة تحت علامة التكامل وقد يضاف المجهول أيضاً خارج التكامل في أحد طرفي المعادلة. وبالرغم من أن معظم المسائل الفيزيائية يمكن صياغتها وتحليلها بدلالة المعادلات التفاضلية فإنه غالباً ما يمكن استبدال بعض المعادلات التفاضلية بمعادلات تكاملية لأنه في هذه الحالة يمكن حلها بكفاءة أكثر باستخدام .التكاملية المعادلات طرق

1 - 2 تعريفات ونظريات أساسية

تعريف 1 - 2- 1 [1]

الفضاء المتجه: لتكن K مجالاً ما، ولتكن X مجموعة غير خالية معرف عليها عمليتان الجمع والضرب بعدد بحيث $x, y \in X$ مجموعة $x + y \in X$ ولكل $x \in X , \lambda \in K$ حاصل ضربهما $\lambda x \in X$ ، عندئذ X يسمي فضاءً متجهاً علي K (وعناصر X تسمي متجهات) اذا تحققت الشروط التالية:

-1 $x + y = x + y$ لكل $x, y \in X$

-2 لكل $x \in X$ يكون $1. x = x$ حيث $1 \in K$

-3 لكل $\lambda \in K$ ولكل $x, y \in X$ يكون $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

-4 لكل $\alpha, \beta \in K$ و $x \in X$ فأن $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

-5 لكل $\alpha, \beta \in K$ و $x \in X$ فأن $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

تعريف 1 - 2 - 2 [1]

الفضاء المعياري: الفضاء المعياري X هو فضاء متجه معرف عليه المعيار $(X, \|\ \|)$. فضاء بناخ (Banach Space) هو فضاء خطي معياري تام. المعيار على الفضاء المتجه الحقيقي أو المركب X هو دالة ذات قيمة حقيقية حيث أنه لكل متجه $\alpha \in X$ تكون معرفة على النحو $\|x\|$ وتحقق الخواص التالية:

1- $\|x\| \geq 0$

2- $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0$

3- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

4- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (المتباينة المثلثية)

حيث x, y متجهات في X و $\alpha \in K$ هي أي كمية قياسية.

تعريف 1 - 2 – 3 [1]

الفضاء التام: يقال عن المتتابعة $\{\ \emptyset_n\ (x)\ \}$ في الفضاء أنها متتابعة أساسية إذا كانت تحقق معيار كوشي $\rho(\emptyset_{n,}\emptyset_m) \leq \varepsilon$ لكل $n, m \geq N(\varepsilon)$، حيث $\varepsilon > 0$.

إذا كانت $\|\emptyset_n - \emptyset_m\| \to 0$ (عندما $n, m \to \infty$ فإننا نقول إن $\phi_n(x)$ تتقارب إلى $\emptyset_m(x)$) ويقال عن الفضاء أنه فضاء تام إذا كانت كل متتابعة أساسية تتقارب إلى عنصر في هذا الفضاء.

تعريف 1 - 2 – 4 [1]

فضاء الضرب الداخلي: فضاء الضرب الداخلي هو فضاء متجه X معرف عليه الضرب

الداخلي. حيث أن الضرب الداخلي على X هو الدالة من $X \times X$ إلى حقل الكمية القياسية K على X. بحيث أنه لكل زوج من المتجهات x, y فإن هذه الكمية القياسية تكتب على الشكل $\langle x, y\rangle$ وتسمي الضرب الداخلي لـ x وy. بحيث أنه لأي متجهات x , y , z وكمية

قياسية α نجد أن:

1- $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

2- $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

3- $\langle x, y\rangle = \langle\overline{y, x}\rangle$

4- $\langle x, x\rangle \geq 0 \ \ \forall x \in X$

$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

والضرب الداخلي على X نعرف عليه المعيار على النحو: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

تعريف 1 – 2 – 5 [1]

الاستقلال الخطي: ليكن X فضاءً متجهاً علي مجال K . إذا كانت $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ مجموعة جزئية من X فإن S تسمي غير مستقلة (مرتبطة) خطياً إذا وجدت ليس كلها اصفار بحيث

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0 \qquad (\mathbf{1.1})$$

واذا كان الحل الوحيد للمعادلة (1.1) هو $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$

فإن S تسمي مستقلة (غير مرتبطة) خطياً علي K .

تعريف 1 - 2 – 6 [1]

متباينة كوشي – شوارتز (Cauchy – Schwarz Inequality): نفرض أن f, g

تنتمي إلى فضاء الضرب الداخلي. بالتالي

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$$

هذه المتباينة متحققة إذا وفقط إذا كان f, g مستقلة خطياً، بحيث أنه لأي كميات قياسية α, β

فإن $\alpha f + \beta g = 0$.

تعريف 1 – 2 – 7[2]

فضاء هيلبرت: بفرض أن H هو فضاء الضرب الداخلي و $\{\emptyset_n\}$ تمثل متتابعة كوشي في H بحيث أن المتتابعة تحقق الخاصية أنه لكل $1 > \varepsilon > 0$ فإننا نوجد $N(\varepsilon)$ بحيث أنه

$$\|\emptyset_n - \emptyset_m\| < \varepsilon \qquad n, m > N(\varepsilon) \tag{2.1}$$

بمعني أخر

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\emptyset_n - \emptyset_m\| = 0 \tag{3.1}$$

يقال عن H أنها فضاء هيلبرت إذا كانت كل متتابعة كوشي تتقارب إلى عنصر في H وإذا كانت متتابعة كوشي متقاربة فإنها يجب أن تتقارب إلى عنصر وحيد.

تعريف 1 – 2 – 8 [2]

الفضاء $\mathbf{L_2[a, b]}$: نقول عن الدالة $f(x)$ أنها دالة تكاملية على الفترة $[a, b]$ إذا كان التكامل

$$\left\{\int_a^b f^2(x)\, dx\right\}^{\frac{1}{2}} = A \qquad , \qquad A \text{ ثابت منتهي}$$

موجود (منتهي). فصل جميع الدوال التكاملية على الفترة $[a, b]$ تعرف بـ $L_2[a, b]$

تعريف 1 – 2 – 9 [2]

المؤثر التكاملي الخطي: يقال عن T أنه مؤثر تكاملي خطي عندما يحول الدالة المعطاة Ø إلى دالة جديدة $\psi = \mathrm{T}\emptyset$

الدالة $\psi(x)$ تعرف بالعلاقة:

$$\psi(x) = (\mathrm{T}\emptyset)(x) = \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)\,dy \qquad (\mathbf{4.1})$$

حيث $\psi \in L_2[a,b]$ و $k(x,y)$ دالة في x و y وقد تكون متصلة أو غير متصلة. واضح أن ψ تكون موجودة إذا كانت Ø قابلة للتكامل.

تعريف 1 – 2 – 10 [2]

المؤثر التكاملي التام: يقال عن المؤثر أنه متصل إذا كان الراسم يحول كل متتابعة متقاربة إلى متتابعة متقاربة مناظرة لها. المؤثر المتصل T الذي يحول الفضاء المعياري S_1 إلى الفضاء المعياري الخطي S_2 هو مؤثر متصل تام.

مبرهنة 1 - 1

المتطابقة التالية

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\int_a^{x_n}\cdots\int_a^{x_2}\int_a^{x_1} \Phi(x_1)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-y)^{n-1}\Phi(y)\,dy \qquad (\mathbf{5.1})$$

حيث $x \in [a,b)$

البرهان

بالرجوع الي الملحق (أ) يمكن الاطلاع على البرهان كاملاً.

1 - 3 أنواع المعادلات التكاملية

تعريف 1 – 3 – 1 [3]

المعادلة التكاملية هي المعادلة التي يكون فيها المجهول تحت علامة التكامل وقد يضاف المجهول أيضاً خارج التكامل في أحد طرفي المعادلة. على سبيل المثال لكل $a \leq x \leq b$ و $a \leq y \leq b$ فإن المعادلات

$$g(x) = \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)\,dy \qquad (6.1)$$

$$\emptyset(x) = g(x) + \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)\,dy \qquad (7.1)$$

$$\emptyset(x) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} k(x,y)[\emptyset(y)]^2 dy \qquad (8.1)$$

تسمي معادلات تكاملية. الدالة $\emptyset$ هي الدالة المجهولة وجميع الدوال الأخرى معلومة، هذه الدوال قد تكون دوال مركبة أو حقيقية من القيم الحقيقية x, y.

المعادلات التكاملية تستخدم عموماً في العديد من التطبيقات الفيزيائية الرياضية. كذلك تستخدم المعادلات التكاملية في رسم صيغ الحلول للمعادلات التفاضلية التي يصعب حلها. في الواقع، يمكن استبدال المعادلة التفاضلية بالمعادلة التكاملية، بحيث أن حل المعادلة التكاملية يحقق بشكل تلقائي الشروط الموضوعة على المسألة سواء كانت حدية، ابتدائية أو مختلطة. كذلك المعادلات التكاملية تكون لها معظم التطبيقات المفيدة في التحليل الدالي وفي التحليل العددي.

سوف نذكر أنواع المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية.

1 - 3 - 1 المعادلات التكاملية الخطية [4]، [5]، [6].

(Linear Integral Equations)

يقال عن المعادلة التكاملية أنها خطية إذا كانت العمليات الخطية منطبقة ومتحققة على الدوال المجهولة. المعادلة التكاملية الخطية تكون على الصورة العامة:

$$\mu\emptyset(\mathrm{x}) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\phi(y)\,dy \qquad (9.1)$$

في المعادلة (9.1) λ ثابت يحمل معاني فيزيائية عن خواص المادة، الدالة $k(x,y)$ معلومة وتسمي نواة المعادلة وتحمل صفات وخواص المادة المستخدمة وأحياناً تكون متصلة أو غير متصلة. والدالة $g(\mathrm{x})$ معلومة أيضاً وتمثل السطح المراد حساب التكامل عليه بينما Ø هي الدالة المجهولة المطلوب تعيينها وهي تمثل في العلوم الفيزيائية دالة الجهد. والمعادلة (9.1) خطية لأن درجة الدالة المجهولة هي الدرجة الأولي.

والمعادلات التكاملية الخطية تنقسم إلي:

1-معادلات فريدهولم التكاملية.
2- معادلات فولتيرا التكاملية.
3- معادلات وينرهويف التكاملية.
4- معادلة رينوال التكاملية.
5- معادلة آبل التكاملية.
6- معادلة كوشي التكاملية.
7- معادلة فريدهولم - فولتيرا التكاملية.
8- معادلة فولتيرا- فريدهولم التكاملية.

- **معادلات فريدهولم التكاملية:** في جميع معادلات فريدهولم التكاملية تكون نهاية الجزء العلوي للتكامل عبارة عن ثابت محدد معلوم b وينتمي إلى الفترة $x \in [a,b]$ وهي كما يلي:

1- معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول تكون $\mu = 0$ وبالتالي تأخذ الشكل:

$$g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)\,dy = 0 \qquad (\mathbf{10.1})$$

-2 معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني نفرض ان $\mu =$ ثابت $\neq 0$

$$\mu\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)\,dy \qquad (\mathbf{11.1})$$

-3 معادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة هي حالة خاصة من (2). نضع في المعادلة (9.1)

$\mu = 1\ ,\ g(x) = 0$.

$$\emptyset(x) = \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)\,dy \qquad (\mathbf{12.1})$$

-4 إذا كانت $\mu = \mu(x)$ ، فإن المعادلة (9.1) تمثل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثالث.

- **معادلة فولتيرا التكاملية:** إذا كانت نهاية حدود التكامل متغيراً فتسمي بمعادلة فولتيرا في معادلة (9.1) إذا كانت النواة $k(x,y) = 0$ عندما $y > x$ فإننا نحصل على المعادلة التكاملية

$$\emptyset\mu(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)\,dy \qquad (\mathbf{13.1})$$

الصيغة (13.1) تمثل معادلة فولتيرا التكاملية وتكون من النوع الأول عندما $\mu = 0$

$$g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)\,dy = 0 \qquad (\mathbf{14.1})$$

ومن النوع الثاني عندما $\mu =$ ثابت $\neq 0$

$$\emptyset\mu(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)\,dy \qquad (\mathbf{15.1})$$

ومن النوع الثالث عندما $\mu = \mu(x)$.

$$\mu(x)\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)\,dy \qquad (16.1)$$

وتسمي النواة $k(x,y)$ نواة فولتيرا إذا كانت $k(x,y)=0$ عندما $x>y$، ومتصلة إذا كانت $k(x,y)$ متصلة عندما $y<x$. وليس شكل المعادلة هو الدليل علي نوعها فمعادلة فريدهولم التكاملية نشأت من مسألة تفاضلية ذات شروط حدية بينما معادلة فولتيرا التكاملية قد نشأت من مسألة تفاضلية ذات شروط ابتدائية كما سيتم تناوله لاحقاً.

- المعادلة التكاملية،

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^\infty k(x-y)\emptyset(y)\,dy \qquad (17.1)$$

تسمي **معادلة وينر- هويف**.

- المعادلة التكاملية،

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x-y)\emptyset(y)\,dy \qquad (18.1)$$

تسمي **معادلة رينوال.**

- المعادلة التكاملية،

$$\emptyset\mu(x) - \lambda \int_a^x \left[\frac{\emptyset(y)}{(x-y)^\alpha}\right] dy = g(x), \quad 0 \le \alpha < 1 \qquad (19.1)$$

تسمي **معادلة آبل**. وقد سميت بهذا الاسم نسبة إلى العالم آبل الذي توصل لها.

- المعادلة التكاملية،

$$a(x)\emptyset(x) + b(x)\int_\Gamma \left[\frac{\emptyset(y)}{(x-y)}\right] dy + \int_\Gamma k\big(x,y,\emptyset(y)\big)\,dy = g(x) \qquad (20.1)$$

تسمي **معادلة كوشي الشاذة** حيث Γ تعني قوس مغلق أو مفتوح في R^2.

- المعادلة التكاملية،

$$\emptyset(x,t) = g(x,t) + \lambda \int_{0}^{t} F(t,\tau)\emptyset(x,\tau)d\tau + \lambda \int_{a}^{b} k(x,y)\emptyset(y,\tau)\, dy \qquad (\mathbf{21.1})$$

حيث $(x \in [a,b], t \in [0,T], T < \infty)$

تسمي معادلة فريدهولم – فولتيرا التكاملية الخطية المختلطة.

- المعادلة التكاملية،

$$\emptyset(x,t) = g(x,t) + \lambda \int_{0}^{t}\int_{a}^{b} F(t,\tau)k(x,y)\emptyset(y,\tau)\, dy\, d\tau \qquad (\mathbf{22.1})$$

حيث $(x \in [a,b], t \in [0,T], T < \infty)$

تسمي معادلة فولتيرا – فريدهولم التكاملية الخطية المختلطة.

في الصيغتين (21.1) و (22.1) الجزء التكاملي لفريدهولم مقاساً بالنسبة للموضع، بينما الجزء التكاملي الخاص بفولتيرا فيعتبر مقاساً بالنسبة للزمن. أيضاً الدالتين $k(x,y)$ مقاسة بالنسبة للموضع، و$F(t,\tau)$ مقاسة بالنسبة للزمن. يكون الحل متحقق في الفضاء

$$L_2[a,b] \times C[0,T], 0 \leq t \leq T < \infty$$

1 - 3 - 2 معادلات تكاملية غير خطية [6]، [7]، [8].

(Non-Linear Integral Equations)

نعتبر المعادلة التكاملية

$$\mu\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_{0}^{x} k\big(x, y, \emptyset(y)\big)\, dy \qquad x \in [0, T]\ ,\ \ T < \infty \qquad (\mathbf{23.1})$$

حيث $k\,, g$ دالتان معلومتان، و $g \in C[0,T]$ و λ ثابت يحمل معاني فيزيائية و $\emptyset$ الدالة المجهولة. المعادلة (23.1) تسمي معادلة فولتيرا غير خطية وتكون من النوع الأول عندما $\mu = 0$ ومن النوع الثاني عندما $\mu =$ ثابت $\neq 0$ وتكون من النوع الثالث عندما $\mu = \mu(x)$.وتسمي المعادلة التكاملية غير خطية إذا اختلفت درجة الدالة المجهولة عن الواحد الصحيح. وقد تسمي المعادلة (23.1) بمعادلة يورشن – فولتيرا التكاملية.

<u>بعض المعادلات التكاملية غير الخطية</u>

هذه بعض أشكال المعادلات غير خطية:

1- المعادلة التكاملية:

$$\emptyset\mu(x) - \lambda \int_{D} k(x, y)\gamma\big(y, \emptyset(y)\big)\, dy = g(x) \qquad (\mathrm{D} \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}, \mathrm{m} \geq 1) \qquad (\mathbf{24.1})$$

هذه المعادلة تسمي معادلة هامريشتين التكاملية ونوعها يعتمد على قيم الـ μ .

عندما تكون معادلة هامريشتين التكاملية على الشكل:

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x, y)\gamma\big(\mathrm{y}, \emptyset(\mathrm{y})\big)\, \mathrm{dy} \qquad (\mathbf{25.1})$$

فإنها تسمي هامريشتين- فولتيرا من النوع الثاني والمعادلة التالية تسمي معادلة هامريشتين – فولتيرا من النوع الأول

$$\int_{a}^{x} k(x, y)\gamma\big(y, \emptyset(y)\big)\, dy = g(x) \qquad (\mathbf{26.1})$$

2- المعادلة التكاملية:

$$\emptyset(x) = g(x) + \int_{a}^{x} k\big(x, y, \emptyset(y)\big)\, dy \qquad (\mathbf{27.1})$$

تسمي معادلة يورشن – فولتيرا.

3- المعادلة التكاملية:

$$a(x)\emptyset(x) + b(x)\int_{\Gamma} \left[\frac{\emptyset(y)}{(y-x)}\right] dy + \int_{\Gamma} F\big(x, y, \emptyset(y)\big)\, dy = g(x) \qquad (\mathbf{28.1})$$

تسمي معادلة كوشي الشاذة.

4 - المعادلات التكاملية:

$$\emptyset\mu(\bar{x}, t\ ) + \lambda \int_{\Omega} K(\bar{x} - \bar{\zeta}, \bar{y} - \bar{\eta}) F(t, \emptyset(\bar{\zeta}, \bar{\eta})) d\bar{\zeta} d\bar{\eta}$$

$$+ \lambda \int_{\Omega}^{t} G(t - \tau)\emptyset(\bar{x}, \bar{y}, \tau) d\tau = \ g(\bar{x}, \bar{y}, t) \qquad (\mathbf{29.1})$$

$$(\bar{x} = x(x_1, x_2, \dots, x_n) \ \ , \ \ \bar{y} = y(y_1, y_2, \dots, y_n))$$

تسمي معادلات فريدهولم- فولتيرا في الشكل غير خطي، حيث Ω تعتمد على منحني التكامل.

1 - 4 تصنيف المعادلات التكاملية بالنسبة للنواة [9]، [10].

المعادلات التكاملية يمكن تصنيفها وتقسيمها بالنسبة للنواة إلي:

أ- معادلة تكاملية ذات نواة $k(x,y)$ متصلة في الفترة $[a,b]$ ولها الشرط:

$|k(x,y)| \leq M$، (حيث M ثابت)

ب-معادلة تكاملية ذات نواة شاذة ولها الشرط:

$$\left(\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} = C \qquad (\mathbf{30.1})$$

حيث C قيمة محدودة منتهية. تسمي نواة هيلبرت- شميت بالتالي فإن المعادلة التكاملية تسمي معادلة من نوع فريدهولم.

وتصنف المعادلات التكاملية علي حسب النواة الشاذة على النحو التالي:

1- إذا كانت النواة تأخذ الشكل:

$$k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}} \quad , \quad 0 \leq \alpha < 1 & (\mathbf{31.1}) \\ A(x,y)\ln|x-y| & (\mathbf{32.1}) \end{cases}$$

حيث $A(x,y)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها. في هذه الحالة يقال عن المعادلة التكاملية أنها ضعيفة الشذوذ بالنسبة لنواة كارلمان في (31.1) أو نواة لوغاريتمية في (32.1).

2- إذا كانت النواة على الشكل:

$$k(x,y) = \frac{B(x,y)}{x-y} \qquad (\mathbf{33.1})$$

فإنها تسمي نواة كوشي. حيث $B(x,y)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها.

3- إذا كانت النواة تأخذ الشكل:

$$k(x,y)=\frac{C(x,y)}{(x-y)^{m}} \quad ,m\geq 2 \qquad (\mathbf{34.1})$$

فإن المعادلة التكاملية تسمي معادلة قوية الشذوذ عندما $m=2$. لكن إذا كانت $m>2$ فإن المعادلة التكاملية تسمي معادلة شديدة الشذوذ. حيث $C(x,y)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها.

4- إذا كانت النواة على الشكل:

$$k(x,y)=\frac{D(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} \quad ,0\leq \alpha<1 \qquad (\mathbf{35.1})$$

حيث $D(x,y)$ دالة متصلة هي ومشتقاتها، بالتالي فإن المعادلة التكاملية تسمي صيغة آبل.

5- النواة القابلة للفصل: تسمي النواة $k(x,y)$ نواة قابلة للفصل إذا أمكن التعبير عنها كمجموع عدد من الحدود المنتهية، بحيث أن كل حد عبارة عن حاصل ضرب دالة في x فقط ودالة في y فقط على النحو التالي:

$$k(x,y)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)v_i(y) \qquad (\mathbf{36.1})$$

حيث تكون الدوال u_i, v_i مستقلة خطياً

6- النواة المتماثلة: الدالة المركبة القيمة $k(x,y)$ تسمي متماثلة إذا كان:

$$k(x,y)=k^{*}(y,x) \qquad (\mathbf{37.1})$$

حيث أن $(*)$ تعبر عن تبديل متغيرات الدالة. وإذا كانت النواة حقيقية فإن

$$k(x,y)=k(y,x)$$

7- اذا كانت

$$k(x,y)=-k(y,x) \qquad (\mathbf{38.1})$$

فإن هذه النواة تسمي الملتوية التماثل.

8- نواة هيلبرت: النواة التي تكون على الصيغة

$$k(x,y)=cot\left(\frac{y-x}{2}\right) \qquad (\mathbf{39.1})$$

حيث y,x متغيرات حقيقية تسمي بنواة هيلبرت.

9- النواة الفرقية: إذا كانت

$$k(x,y)=k(x-y) \qquad (\mathbf{40.1})$$

أي إن النواة تعتمد فقط على $(x-y)$ عندها تسمي النواة بالنواة الفرقية، تعرف المعادلة التكاملية ذات النواة الفرقية على انها معادلة من النوع الملتف أو المطوي.

1 - 5 استنباط معادلة فريدهولم التكاملية [11]

سنقوم الآن بإثبات أن مسائل الشروط الحدية في المعادلات التفاضلية تؤدي إلى شكل معادلة فريدهولم التكاملية. لذلك نفرض المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية التالية

$$y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=F(x) \quad a\le x\le b \qquad (\mathbf{41.1})$$

تحت الشروط

$$y(a)=y_0 \quad , \quad y(b)=y_1 \qquad (\mathbf{42.1})$$

حيث أن F,B,A دوال معرفة ومتصلة هي ومشتقاتها خلال الفترة $a\le x\le b$. بتكامل المعادلة (41.1) من a إلى x واستخدام الشروط الحدية نحصل علي:

$$y'(x)\ |_a^x + \int_a^x A(x)y'(x)\,dx + \int_a^x B(x)y(x)\,dx = \int_a^x F(x)\,dx \qquad (\mathbf{43.1})$$

بأجراء التكامل للحد $\int_a^x A(x)y'(x)\,dx$ من المعادلة (43.1) وذلك باستخدام قواعد التكامل بالتجزئة نجد أن:

$$\int_a^x A(x)y'(x)\,dx = [A(x)y(x)]_a^x - \int_a^x A'(x_1)y(x_1)\,dx_1 \qquad (\mathbf{44.1})$$

بالتعويض من (44.1) في (43.1) نحصل علي

$$\begin{aligned} y'(x) - y'(a) &= \int_a^x F(x_1)\,dx_1 - A(x_1)y(x_1) + A(a)y_0 \\ &+ \int_a^x [A'(x_1) - B(x_1)]y(x_1)\,dx \qquad (\mathbf{45.1}) \end{aligned}$$

نضع ثابت التكامل على الصورة $C = y'(a)$ ثم بالتعويض في المعادلة (45.1) نجد أن:

$$\begin{aligned} y'(x) = C &+ \int_a^x F(x_1)dx_1 - A(x_1)y(x_1) + A(a)y_0 \\ &+ \int_a^x [A'(x_1) - B(x_1)]y(x_1)dx_1 \qquad (\mathbf{46.1}) \end{aligned}$$

بتكامل (46.1) مرة ثانية واستخدام مبرهنة (1-1) نحصل علي:

$$\begin{aligned} y(x) - y_0 &= [c + A(a)y_0](x-a) \\ &+ \int_a^x (x-t)F(t)dt \\ &- \int_a^x \{A(t) - (x-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt \qquad (\mathbf{47.1}) \end{aligned}$$

الثابت C يمكن حسابه عن طريق وضع $x = b$ في المعادلة (47.1) واستعمال الشرط $y(b) = y_1$ فنحصل علي:

$$y_1 - y_0 = [C + A(a)y_0](b - a) + \int_a^b (b - t)F(t)dt - \int_a^b \{A(t) - (b - t)[A'(t) - B(t)]\}\, y(t)dt \qquad (48.1)$$

الصيغة السابقة يمكن تعديلها وكتابتها في الصورة:

$$C + A(a)y_0 = \frac{1}{b-a}\left\{y_1 - y_0\int_a^b (b-t)F(t)dt + \int_a^b \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt\right\} \qquad (49.1)$$

باستخدام المعادلة (49.1) في (47.1) نجد أن:

$$y(x) - y_0 = \frac{x-a}{b-a}\left\{(y_1 - y_0) - \int_a^b (b-t)F(t)dt + \int_a^b \{A(t)(x-t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt\right\} + \int_a^x (x-t)F(t)dt - \int_a^x \{A(t) - (x-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt$$

والتي يمكن تبسيطها على شكل

$$y(x) = y_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt + \frac{x-a}{b-a}\left\{(y_1 - y_0) - \int_a^b (b-t)F(t)dt\right\}$$
$$+ \left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\int_a^b \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt\right.$$
$$\left. - \int_a^x \{A(t) - (x-t)[A'(t) - B(t)]\}\right\}y(t)dt \qquad \mathbf{(50.1)}$$

بفرض

$$f(x) = y_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt + \frac{x-a}{b-a}\left\{(y_1 - y_0) - \int_a^b (b-t)F(t)dt\right\} \qquad \mathbf{(51.1)}$$

المعادلة (50.1) تصبح:

$$y(x) = f(x) + \frac{x-a}{b-a}\int_a^b \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}\, y(t)dt$$
$$- \int_a^x \{A(t) - (x-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt \qquad \mathbf{(52.1)}$$

من الملاحظ أنه في الجزء الثاني من التكامل الخاص بالدالة $y(x)$ إذا كانت $x < t$ فإن

$$\int_a^x \{A(t) - (x-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt \to 0$$

بالتالي المعادلة (50.1) تأخذ الشكل النهائي التالي

$$y(x) = f(x) + \int_a^b k(x,y)y(t)dt \qquad \mathbf{(53.1)}$$

وهي تمثل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني ولها النواة

$$k(x,y) = \frac{x-a}{b-y}\{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\} \quad ,x < t \qquad \mathbf{(54.1)}$$

وإذا كانت $x > t$ فإننا نفرض أنها وصلت إلي أعلي قيمة لها وهي $x = b$ وعليه من معادلة (50.1) و (52.1) نجد أن:

$$\int_a^b k(x,t)y(t)dt = \frac{x-a}{b-a}\int_a^b \{A(t)-(b-t)[A'(t)-B(t)]\}y(t)dt$$

$$-\int_a^b \{A(t)-(x-t)[A'(t)-B(t)]\}y(t)dt$$

$$= \int_a^b \left\{\frac{x-a}{b-a}-1\right\} \mathrm{A(t)y(t)dt}$$

$$-\int_a^b \left[\frac{x-a}{\mathrm{b-a}}(\mathrm{b-t})-(x-t)\right][\mathrm{A'(t)-B(t)]y(t)dt}$$

$$= \int_a^b \left\{-\frac{b-x}{b-a}\right\} \mathrm{A(t)y(t)dt} - \int_a^b \frac{\mathrm{(t-a)(b-x)}}{\mathrm{b-a}}[\mathrm{A'(t)-B(t)]y(t)dt}$$

وعليه تكون النواة معرفة على فترتين على النحو:

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{(x-a)}{b-a}\{A(t)-(b-t)[A'(t)-B(t)]\} & x<t \\ A(t)\left\{\frac{x-b}{b-a}\right\} - \frac{(t-a)(b-x)}{b-a}[A'(t)-B(t)] & t<x \end{cases} \qquad (\mathbf{55.1})$$

وعلى ذلك يمكن القول إن المعادلة التفاضلية (41.1) تحت الشروط الحدية (42.1) أمكن تمثيلها بمعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني علي الصورة (53.1) ولها النواة $k(x,t)$ معرفة بالمعادلة (55.1) والحد الحر $f(x)$ معرف بالعلاقة (51.1).

مثال 1 - 1

حول المعادلة التفاضلية الحدية التالية إلى معادلة التكاملية

$$\mathrm{y}'' + y = 0 \qquad (\mathbf{56.1})$$

$$y(0)=0 \quad , \quad y(1)=1 \qquad (\mathbf{57.1})$$

الحل

بمقارنة المعادلات (56.1) و (57.1) بالعلاقة (41.1) والشروط (42.1) نجد أن:

$$A(x)=0\ \ ,\ \ B(x)=1\ \ ,\ \ F(x)=0\ \ ,\ \ y_0=0\ \ ,\ \ y_1=1$$

بالتعويض بهذه القيم في الطرف الحر (51.1) والنواة (55.1) نحصل علي:

$$f(x)=\int_0^x (x-t).0dt+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\left[1-\int_a^b (b-t).0dt\right]$$

$$f(x)=\frac{x-a}{b-a}\quad ,\qquad k(x,t)=\begin{cases}(b-t)\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & x<t\\ \frac{(t-a)(b-x)}{b-a} & x>t\end{cases}$$

حيث أن النواة المتصلة عند $x=t$ لكن مشتقاتها غير متصلة حيث أنه، عندما

$$\frac{\partial k}{\partial x}=\begin{cases}\frac{b-t}{b-a} & x<t\\ \frac{-(t-a)}{b-a} & x>t\end{cases}$$

قيمة القفزة لهذه المشتقة عند $x=t$ هي

$$\left[\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right]_{t+0}-\left[\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\right]_{t-0}=\frac{a-t}{b-a}-\frac{b-t}{b-a}=\frac{a-t-b+t}{b-a}=\frac{-(b-a)}{b-a}=-1$$

بالتالي، معادلة فريدهولم التكاملية تأخذ الشكل:

$$y(x)=\int_a^x \frac{(t-a)(b-x)}{b-a}y(t)dt+\int_x^b \frac{(b-t)(x-a)}{(b-a)}y(t)dt+\frac{x-a}{b-a}$$

1 - 6 استنباط معادلة فولتيرا التكاملية [12]

في هذا الجزء سنقوم باستنباط معادلة فولتيرا التكاملية من مسائل القيم الابتدائية ولذلك سوف نوجد العلاقة الأساسية بين معادلات فولتيرا التكاملية والمعادلة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية.
نعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية التالية:

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = F(x) \qquad (58.1)$$

الخاضعة للشروط الابتدائية

$$y(a) = q_0 \quad , \quad y'(a) = q_1 \qquad (59.1)$$

حيث إن الدوال A, B, F دوال معرفة ومتصلة في الفترة $a \le x \le b$. المعادلة (58.1) تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وغير متجانسة.

بتكامل المعادلة (58.1) من a إلى x نجد أن:

$$\int_a^x y''(x_1)dx_1 + \int_a^x A(x_1)y'(x_1)dx_1 + \int_a^x B(x_1)y(x_1)dx_1 = \int_a^x F(x_1)dx_1 \qquad (60.1)$$

بأجراء التكامل بالتجزئة للحد الثاني للمعادلة (60.1) نحصل علي:

$$\int_a^x A(x_1)y'(x_1)dx_1 = [A(x_1)y(x_1)]_a^x - \int_a^x y(x_1)A'(x_1)dx_1 \qquad (61.1)$$

بالتعويض من المعادلة (61.1) في (60.1) وإجراء التكامل نحصل علي:

$$[y'(x_1)]_a^x + [A(x_1)y(x_1)]_a^x - \int_a^x A'(x_1)y(x_1)dx_1 + \int_a^x B(x_1)y(x_1)dx_1 = \int_a^x F(x_1)dx_1$$

$$y'(x) - q_1 + A(x)y(x) - A(a)q_0 - \int_a^x A'(x_1)y(x_1)dx_1 + \int_a^x B(x_1)y(x_1)dx_1 = \int_a^x F(x_1)dx_1$$

$$y'(x) - q_1 + A(x)y(x) - A(a)q_0 - \int_a^x [A'(x_1) - B(x_1)]y(x_1)dx_1 = \int_a^x F(x_1)dx_1 \qquad (\mathbf{62.1})$$

بتكامل المعادلة (62.1) مرة أخري نجد أن:

$$\int_a^x y'(x_1)dx_1 - \int_a^x [q_1 + A(a)q_0]\,dx + \int_a^x A(x_1)y(x_1)dx_1 - \int_a^x\int_a^x [A'(x_1) - B(x_1)]y(x_1)dx_1dx_2 = \int_a^x\int_a^x F(x_1)dx_1dx_2 \qquad (\mathbf{63.1})$$

باستخدام المتطابقة:

$$\int_a^x\int_a^{x_2} F(x_1)dx_1dx_2 = \int_a^x (x-t)F(t)dt \qquad (\mathbf{64.1})$$

في المعادلة (63.1) يمكن للدارس الوصول إلي

$$y(x) - \{q_0 + (x-a)[q_1 + A(a)q_0]\} - \int_a^x (x-t)F(t)dt + \int_a^x \{A(t) + (x-t)[B(t) - A'(t)]\}y(t)dt = 0 \qquad (\mathbf{65.1})$$

المعادلة (65.1) يمكن كتابتها على الصورة

$$y(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)y(t)dt \qquad (\mathbf{66.1})$$

حيث

$$f(x) = q_0 + (x-a)[q_1 + A(a)q_0] + \int_a^x (x-t)F(t)dt \qquad (\mathbf{67.1})$$

و

$$k(x,t) = -\{A(t) + (x-t)[B(t) - A'(t)]\} \qquad (\mathbf{68.1})$$

المعادلة (66.1) تمثل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني التي لها النواة$k(x,t)$ والطرف الحر.$f(x)$ ومن الملاحظ أن النواة في المعادلة (68.1) قد ارتبط شكلها بدلالة المعاملات المتغيرة للمعادلة التفاضلية مما يوضح أن الخواص الطبيعية للمادة المشتقة منها المعادلة التفاضلية تؤثر بشكل كلي على الشكل العام للنواة. أيضاً نجد أن الدالة المعرفة بالعلاقة (67.1) قد ارتبط شكلها بدالة السطح الحر $f(x)$ والشروط الابتدائية المعطاة. ولذلك تسمي أيضاً في المعادلة التكاملية الطرف الحر.

مثال 1 - 2

اوجد المعادلة التكاملية المناظرة للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + xy' + 3y = 0 \qquad (69.1)$$

والشرط الابتدائي

$$y(0) = -1 \quad , \quad y'(0) = 0 \qquad (70.1)$$

الحل

بمقارنة المعادلات (69.1) و (70.1) بالمعادلات (58.1) و (59.1) على الترتيب نحصل علي

$$A(x) = x \ \ , \ \ B(x) = 3 \ \ , \ \ q_0 = -1 \ \ , \ \ q_1 = 0$$

بالإضافة لذلك بتطبيق العلاقة (67.1) و (68.1) نحصل علي:

$$k(x,y) = -\{A(t) + (x-t)[B(t) - A'(t)]\} = -(3x - 2t)$$

$$f(x) = q_0 + (x-a)(q_1 + A(a)q_0) + \int_0^x (x-t)F(t)dt = -1$$

بالتالي نحصل علي:

$$\emptyset(x) + 1 + \int_0^x (3x - 2\mathrm{t})\emptyset(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 0$$

مما يؤدي إلي:

$$\emptyset(x) = -1 - \int_0^x (3x - 2t)\emptyset(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

.

الباب الثاني

الطرق التحليلية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني

Solution of Fredholm and Volterra Integral Equation of second kind using Analytical Methods

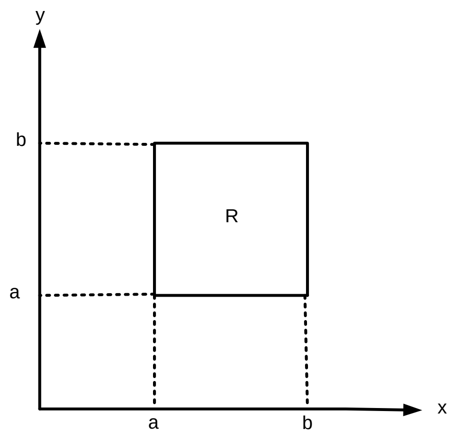
الباب الثاني: - الطرق التحليلية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني

2 - 1 مقدمة

تعرف معادلة فريدهولم التكاملية بالصورة العامة

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)dy \qquad (1.2)$$

حيث $\emptyset$ هي الدالة المجهولة المطلوب إيجادها g دالة متصلة معلومة. k دالة معلومة في متغيرين وتسمي بنواة المعادلة التكاملية. λ (ثابت) يمكن أن يتم تضمينه مع النواة k.



شكل (2-1)

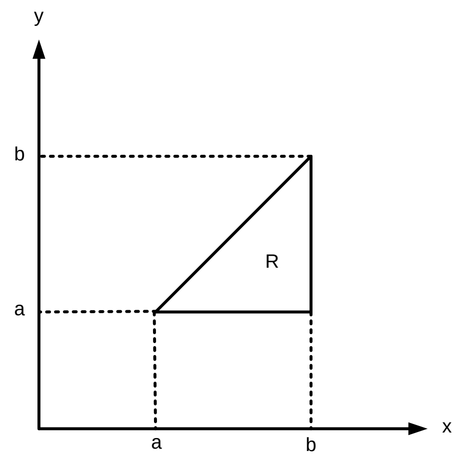
النواة k معرفة على المنطقة المربعة $R = [a,b] \times [a,b]$، شكل (2-1)، حيث $a \leq x \leq b$ و $a \leq y \leq b$ ، a,b ثوابت محددة. يمكن أن تكون الفترة $[a,b]$ غير منتهية على الشكل $[a,\infty)$ أو $(-\infty,b]$ او $(-\infty,\infty)$ وعندها تكون المعادلة (1.2) شاذة.

تختلف معادلة فولتيرا في صورتها المعتادة عن معادلة فريدهولم في كون إن الحد الأعلى لفترة التكامل غير مقيد، وعادة ما تكتب بالصورة

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)dy \qquad (2.2)$$

حيث $\emptyset$ هي الدالة المجهولة، g دالة متصلة معلومة، k نواة المعادلة، λ ثابت أو متغير على خلاف معادلة فريدهولم، نلاحظ أن نطاق النواة أو منطقة التكامل R في معادلة فولتيرا ليست مثبتة ولكن متغيرة وتعتمد على المتغير المستقل. شكل (2-2) يوضح إحدى الحالات البسيطة لشكل منطقة التكامل لمعادلة فولتيرا.

في الكثير من التطبيقات العلمية يدرس سلوك الحل $\emptyset$ للمعادلة (2.2) علي كامل المحور الحقيقي، أي أن فترة التكامل (نطاق الحل) تعرف بـ $a \leq x \leq \infty$، هذا لا يمنع انه في حالات كثيرة أخري يفترض أن $a \leq x \leq b$ لقيم منتهية لـ b . وعادة ما يكون الحد الأدنى لفترة التكامل مساوياً للصفر، أي أن $a = 0$.



شكل (2-2)

في هذا الباب سنتطرق لبعض الطرق التحليلية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

هناك تشابه كبير بين طرق الحل لمعادلة فريدهولم ومعادلة فولتيرا التكامليتان.

2 - 2 بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فريدهولم التكاملية

لحل معادلة فريدهولم فان هناك عددا من الطرق التي تطبق لهذا الغرض، وفيما يلي بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني.

- طريقة النواة القابلة للفصل (المنحلة).
- طريقة الحساب المباشر.
- طريقة التحليل المعدلة.
- طريقة التقريبات المتتالية.
- طريقة التحليل لأدوميان.
- طريقة الحل المتسلسل.

2 - 2 - 1 طريقة النواة القابلة للفصل [13].

(The degenerate Kernel Method)

في هذا الجزء سيتم تطبيق طريقة النواة القابلة للفصل لحل معادلات فريدهولم التكاملية بأنوية منفصلة. الطريقة تقترب من طريقة المعادلات التكاملية لفريدهولم بشكل مباشر وتعطي حل بشكل دقيق وليس على هيئة سلسلة، وهذه الطريقة سيتم تطبيقها للانوية القابلة للفصل والانوية المنفصلة في الصيغة التالية:

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(y) \tag{3.2}$$

عندما الدوال $u_1, \dots, u_n$ والدوال $v_1, \dots, v_n$ عبارة عن دوال خطية مستقلة .وباستخدام النواة، فأن تكامل فريدهولم من النوع الثاني

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) \emptyset(y) dy \tag{4.2}$$

يصبح

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \int_a^b v_i(y)\emptyset(y)dy \qquad (5.2)$$

الطريقة لحل هذه المعادلة تعتمد أساساً على اختيار المتغير λ وعلى التعريف

$$\alpha_i = \int_a^b v_i(\mathrm{y})\emptyset(\mathrm{y})dy \qquad (6.2)$$

التكامل في الطرف الأيمن يعتمد فقط على المتغير y وبحدود ثابتة للتكامل بالنسبة لـ y. وهذا يعني إن كل التكامل مساوي لثابت. استناداً لذلك وبتعويض (6.2) في (5.2) نتحصل علي:

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x) \qquad (7.2)$$

وبالتالي تختصر المسألة في أيجاد قيم α_i. ولعمل ذلك نقوم بوضع قيمة $\emptyset(x)$ كما معطاة بالمعادلة (7.2) في (5.2) فنتحصل علي

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\left\{\alpha_i - \int_a^b v_i(\mathrm{y})\left[g(y) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(y)\right]\mathrm{dy}\right\} = 0 \qquad (8.2)$$

لكن الدوال u_i مستقلة خطياً، بالتالي

$$\alpha_i - \int_a^b v_i(\mathrm{y})\left[g(y) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k(y)\right]\mathrm{dy} = 0, \qquad (9.2)$$

باستخدام الرموز المبسطة

$$\int_a^b v_i(\mathrm{y})g(y)dy = h_i, \qquad \int_a^b v_i(y)u_k(y)dy = c_{ik}, \qquad (10.2)$$

حيث h_i و c_{ik} ثوابت معلومة، فإن المعادلة (9.2) تصبح

$$\alpha_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\alpha_k = h_i, \qquad i = 1, \dots, n \tag{11.2}$$

وهذا عبارة عن نظام بعدد n من المعادلات الجبرية للمجاهيل α_i. والمحدد $D(\lambda)$ لهذا النظام هو:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda c_{11} & -\lambda c_{12} & \dots & -\lambda c_{1n} \\ -\lambda c_{21} & 1 - \lambda c_{22} & \dots & -\lambda c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\lambda c_{n1} & -\lambda c_{n2} & \cdots & 1 - \lambda c_{nn} \end{vmatrix} \tag{12.2}$$

كذلك يعبر هذا النظام عن متعددات حدود في λ وبدرجة على الأكثر n. بالإضافة إلى ذلك أنها لا تساوي الصفر، حيث، انه عندما $\lambda = 0$ فإنها تصبح مصفوفة الوحدة.

لجميع قيم λ عندما $D(\lambda) \neq 0$، فإن النظام الجبري (11.2)، والمعادلة التكاملية (4.2)، يكون لديها حل وحيد. ومن الجانب الأخر، فإن جميع قيم λ عندما $D(\lambda) = 0$، فإن النظام الجبري (11.2)، مع المعادلة التكاملية (4.2)، أما إن تكون غير قابلة للحل أو يكون لها عدد لانهائي من الحلول. لاحظ بأنه أخذنا في الاعتبار فقط المعادلة التكاملية من النوع الثاني، حيث يمكن تطبيق هذه الطريقة وحدها فقط.

أمثلة للانوية المنفصلة هي $x - y, x^2 - y^2, xy^2 + x^2y, \dots$

مثال 2 - 1

أوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني:

$$\emptyset(x) = -\frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y)\emptyset(\mathrm{y})\mathrm{dy} \qquad (\mathbf{13.2})$$

الحل

الآن النواة $k(x,y) = \cos(x-y)$ يمكن كتابتها كالتالي:

$$k(x,y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \qquad (\mathbf{14.2})$$

وهي نواة منفصلة لكي يتحقق:

$$k(x,y) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)v_i(y) \qquad (\mathbf{15.2})$$

حيث

$$u_1(x) = \cos(x) \qquad u_2(x) = \sin(x)$$

$$(\mathbf{16.2})$$

$$v_1(\mathrm{y}) = \cos(\mathrm{y}) \qquad v_2(\mathrm{y}) = \sin(y)$$

نستخدم طريقة في الفقرة (1-2-2) في بعد واحد $[a,b]$ والعلاقة التالية:

$$\int_a^b v_i(\mathrm{y})u_k(\mathrm{y})\mathrm{dy} = c_{ik} \qquad \int_a^b v_i(\mathrm{y})g(y)dy = h_i \qquad (\mathbf{17.2})$$

يكون لدينا

$$c_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_1(y)u_1(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\cos(y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2y)dy \qquad (18.2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[y + \frac{1}{2}\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(\pi)\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$c_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_1(y)u_2(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\sin(y)dy = c_{21} \qquad (19.2)$$

استخدام التكامل بالتعويض دع $\quad w = \sin(y) \rightarrow dw = \cos(y)dy$

بالتعويض عن w في المعادلة (19.2) نتحصل علي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} wdw \rightarrow \left[\frac{1}{2}w^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2}\sin^2(y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(0)\right) = \frac{1}{2}$$

$$c_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_2(y)u_2(y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\sin(y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(y)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2y)dy \qquad (20.2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[y - \frac{1}{2}\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi)\right) - \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$h_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_1(y)g(y)dy = \frac{-2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\cos(y)dy$$

باستخدام العلاقة (18.2)

$$h_1 = \frac{-2}{\pi}.\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{2} \qquad (\mathbf{21.2})$$

$$h_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_2(\mathrm{y})g(y)dy = \frac{-2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\cos(y)\,dy$$

باستخدام العلاقة (19.2)

$$h_2 = \frac{-2}{\pi}.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\pi} \qquad (\mathbf{22.2})$$

بإيجاد α_i في العلاقة

$$\alpha_i - \lambda\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\alpha_k = h_i \qquad , \qquad i = 1, \dots, n \qquad (\mathbf{23.2})$$

يمكن كتابة (23.2) في شكل مصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{24.2})$$

$$\rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{\pi}\begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\pi} \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{25.2})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2}{\pi} \\ \frac{-2}{\pi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\pi} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{\pi^2}{-4}\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\pi} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{26.2})$$

باستخدام العلاقة

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x) \qquad (27.2)$$

$$\emptyset(x) = \frac{-2}{\pi}\cos(x) + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\cos(x) + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) \qquad (28.2)$$

عليه

$$\emptyset(x) = \sin(x)$$

للمزيد من الأمثلة انظر [10]، [11]، [12].

2 – 2 - 2 طريقة التقريبات المتتالية

(The Method of Successive Approximations)

طريقة التقريبات المتتالية تستخدم لأيجاد الحل لمسائل القيم الابتدائية أو المعادلات التكاملية، بهذه الطريقة يمكن إيجاد الحل لأي مسألة وذلك بإيجاد التقريبات المتتالية للحل، وهذا يتم بإعطاء تخمينه ابتدائية لبداية الحل مثل $\emptyset_0$ تسمي تقريبية صفرية والتي من الممكن ان تكون أي قيمة حقيقية لدالة $\emptyset_0$. ولإيجاد الحل التقريبي نقوم باستخدام العملية التكرارية بناءً على القيم السابق الحصول عليها.

1- طريقة بيكارد [14]

(The Picard method)

سميت بطريقة بيكارد نسبة إلى الرياضي الفرنسي تشارلز بيكارد (Emile Charles Picard) وتتخلص هذه الطريقة في فرض حل تقريبي ابتدائي، أي بفرض

$$\emptyset_0(x) = \left(\text{اي دالة حقيقية}\right),$$

ثم التعويض بهذا الحل في المعادلة التكاملية للحصول على التقريب الأول للحل $\emptyset_1(x)$ ثم التعويض بهذا الاخير من جديد في المعادلة التكاملية، وهكذا

$$\emptyset_n(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_{n-1}(y)dy \quad , \quad n = 1,2,3,\dots \qquad (29.2)$$

ليكن الحل المضبوط هو

$$\emptyset(x) = \lim_{n\to\infty} \emptyset_n(x) \qquad (30.2)$$

مثال 2 - 2

مستخدماً طريقة التقريبات المتتالية (بيكارد)، اوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية الآتية

$\emptyset(x) = x + e^x - \int_0^1 xy\emptyset(y)dy$

الحل

بفرض إن $\qquad \emptyset_0(x) = 0$

الآن بتطبيق العلاقة التكرارية (29.2) نحصل على ما يلي

$$\emptyset_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_0(y)dy = x + e^x - \int_0^1 xy(0)dy = x + e^x$$

$$\emptyset_2(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_1(y)dy$$

$$= x + e^x - \int_0^1 xy(y + e^y)dy$$

$$= x + e^x - x\int_0^1 y^2 dy - x\int_0^1 ye^y dy$$

$$= x + e^x - x[y^3/3]_0^1 - x[(y-1)e^y]_0^1 = e^x - \tfrac{1}{3}x$$

بالاستمرار

$$\emptyset_3(x) = x + e^x - \int_0^1 xy\emptyset_2(y)dy = \cdots = e^x + \tfrac{1}{9}x$$

$$\emptyset_4(x) = x + e^x - \int_0^1 xy\emptyset_3(y)dy = \cdots = \mathrm{e}^x - \tfrac{1}{27}x$$

يمكن استنتاج أن

$$\emptyset_n(x) = x + e^x - \int_0^1 xy\emptyset_{n-1}(y)dy$$

$$= e^x + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}x, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

وبالتالي يكون الحل هو

$$\emptyset(x) = \lim_{n\to\infty} \emptyset_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^x + \tfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}x\right)$$

$$= e^x \pm 3x\left(\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{3^n}\right) = e^x$$

1- طريقة متسلسلة نيومان [16],[15]

(The Neumann series method)

يتم الحصول على متسلسلة نيومان عندما تكون الدالة $\emptyset_0(x) = g(x)$ ، بمعني أخر تكون الحدود غير المشمولة تحت علامة التكامل مثلاً:

$$\emptyset_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_0(y)dy \qquad (31.2)$$

$$= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy$$

$$= g(x) + \lambda f_1(x) \qquad (32.2)$$

عندما

$$f_1(x) = \int_a^b k(x,y)g(y)dy \qquad (33.2)$$

يمكن الحصول على التقريب الثاني $\emptyset_2(x)$ كالتالي

$$\emptyset_2(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_1(y)dy \qquad (34.2)$$

$$= g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\{g(y) + \lambda f_1(y)\}dy$$

$$= g(x) + \lambda f_1(x) + \lambda^2 f_2(x) \qquad (35.2)$$

عندما

$$f_2(x) = \int_a^b k(x,y)f_1(y)dy \qquad (36.2)$$

بالاستمرار بنفس الطريقة، يمكن الحصول على الحل النهائي لـ $\emptyset(x)$

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda f_1(x) + \lambda^2 f_2(x) + \cdots + \lambda^n f_n(x) + \cdots$$

$$= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n f_n(x) \qquad (37.2)$$

عندما

$$f_n(x) = \int_a^b k(x,y) f_{n-1} dy \qquad n \geq 1 \qquad (38.2)$$

المتسلسلة (37.2) تعرف بمتسلسلة نيومان. وهذه المتسلسلة اللانهائية تتقارب بشكل منتظم وبصيغة مطلقة، حيث

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \qquad , \qquad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b k^2(x,y) dx dy}$$

بالإضافة الي ذلك:

$$\int_a^b k^2(x,y) dy \leq A \,, \qquad a \leq x \leq b$$

حيث A ثابت، وعليه فإن متسلسلة نيومان تتقارب بشكل منتظم ومطلق في المدى $[a,b]$ ويمكن الحصول على الحل النهائي لـ $\emptyset(x)$

$$\emptyset(x) = g(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \lambda^m f_m(x) \qquad (39.2)$$

مثال 2 - 3

اوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية باستخدام طريقة التقريبات المتتالية (متسلسلة نيومان)

$$\emptyset(x) = 1 + \int_0^1 x\emptyset(y)dy$$

الحل

نفرض إن

$$\emptyset_0(x) = g(x) = 1$$

التقريب الأول يمكن حسابه كالتالي

$$\emptyset_1(x) = 1 + \int_0^1 x\emptyset_0(y)dy$$

$$= 1 + \int_0^1 xdy$$

$$= 1 + x$$

بالاستمرار بنفس الطريقة، نتحصل علي

$$\emptyset_2(x) = 1 + \int_0^1 x\emptyset_1(y)dy$$

$$= 1 + \int_0^1 x(1+y)dy$$

$$= 1 + x\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

وبنفس الطريقة، فإن التقريب الثالث يكون كالتالي

$$\emptyset_3(x) = 1 + x\int_0^1 \left(1 + \frac{3y}{2}\right) dy$$

$$= 1 + x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

لذا نتحصل علي

$$\emptyset_n(x) = 1 + x\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$

وبالتالي

$$\emptyset(x) = \lim_{n\to\infty} \emptyset_n(x)$$

$$= 1 + \lim_{n\to\infty} x \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^m}$$

$$= 1 + x\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$= 1 + 2x$$

وهو الحل المطلوب

2 - 3 وجود ووحدانية الحل لمعادلة فريدهولم التكاملية [17]

نظرية الوجود والوحدانية

إذا كانت النواة $k(x,y)$ في المعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)dy$$

هي دالة حقيقية ومتصلة ومحددة في المنطقة المربعة R، أي أن

$$|k(x,y)| \le M\,, \qquad a \le x \le b, \qquad a \le y \le b$$

حيث M هو عدد حقيقي موجب ومحدد. وإذا كانت الدالة $g(x) \neq 0$ متصلة خلال الفترة $[a,b]$،عندها فإن الشرط الكافئ لضمان إن للمعادلة (1.2) حل وحيد يعطي بالعلاقة

$$|\lambda|M(b-a) < 1 \qquad \textbf{(40.2)}$$

الشرط (40.2) يضمن وجود حل وعدم تحققه لا يعني بالضرورة انه ليس هناك حل، **فمثلاً**

$$\emptyset(x) = -4 + \int_0^1 (2x+3y)\emptyset(y)dy$$

لا يتحقق هذا الشرط، حيث $\lambda = 1$ و $|k(x,y)| \le 5$ و $(b-a) = 1$ وعليه فأن

$$|\lambda|M(b-a) = 5 > 1$$

ومع هذا فأن $\emptyset(x) = 4x$ هو حل مضبوط لها.

الإثبات

بالرجوع الي الملحق (ب) يمكن الاطلاع على الإثبات كاملاً.

2- 4 بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فولتيرا التكاملية.

لحل معادلة فولتيرا فإن هناك عدداً من الطرق التي تطبق لهذا الغرض. وفيما يلي بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

- طريقة الحل المتسلسل.
- طريقة التحليل المعدلة.
- طريقة التقريبات المتتالية.
- طريقة الحل بالتحويل إلى مسألة قيمة ابتدائية.
- طريقة التغاير التكراري.
- طريقة تحويل لابلاس.

2 – 4 - 1 طريقة الحل المتسلسل.[18] ، [19]

(Series Solution Method)

طريقة الحل المتسلسل هي طريقة مفيدة تم استنتاجها من متسلسلة تايلور وتستخدم بإيجاد الحل للمعادلات التكاملية.

تعريف 2 - 4 - 1

الدالة الحقيقية $\emptyset$ تسمي تحليلية إذا كانت مشتقاتها من كل الرتب مثل متسلسلة تايلور عند أي نقطة b في النطاق

$$\emptyset(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\emptyset^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k \qquad (47.2)$$

تقترب إلى $\emptyset(x)$ مجاور لـ b.

للتبسيط، الشكل العام لمتسلسلة تايلور عند $x = 0$ يمكن كتابتها على الصورة:

$$\emptyset(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{48.2}$$

نفرض أن الحل $\emptyset(x)$ لمعادلة فولتيرا التكاملية (2.2) هو حل تحليلي، ويأخذ شكل متسلسلة تايلور (48.2)، بحيث المعاملات a_n سوف يتم أيجادها.

تعويض (48.2) في طرفي المعادلة (2.2) يعطي

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T\big(g(x)\big) + \lambda \int_0^x k(x,y)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right) dy \tag{49.2}$$

او

$$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots = T\big(g(x)\big) + \lambda \int_0^x k(x,y)(a_0 + a_1y^1 + a_2y^2 + \cdots)dy \tag{50.2}$$

حيث $T\big(g(x)\big)$ متسلسلة تايلور لـ $g(x)$. المعادلة التكاملية (49.2) سوف يتم تحويلها الي التكامل الاعتيادي في المعادلة (50.2) بدلاً من تكامل الدالة الغير معروفة لـ $\emptyset(x)$، حدود التي على شكل y^n ، $n \geq 0$ سوف يتم تكاملها لاحظ أنه البحث عن الحل المتسلسل، عليه إذا كانت $g(x)$ تتضمن دوال أولية مثل دوال مثلثية، دوال أسية وغيرها

عليه امتداد تايلور للدوال ذات العلاقة بالدالة $g(x)$ يجب استخدامها. المثال التالي يوضح طريقة الحساب المتسلسل.

مثال 2 - 4

اوجد حل للمعادلة فولتيرا التكاملية باستخدام طريقة الحل المتسلسل

$$\emptyset(x) = 2e^x - x - 2 + \int_0^x (x-y)\emptyset(y)dy \qquad (\mathbf{51.2})$$

الحل

سوف يتم استخدام بعض حدود سلسلة تايلور لـ e^x وكذلك الحل لـ $\emptyset(x)$ حسب المعادلة (51.2) لإيجاد

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

$$= x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{12}x^4 + \cdots + \int_0^x (x-y)(a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots)dy \quad (\mathbf{52.2})$$

نكامل الطرف الأيمن وبإخذ الحدود المتشابهة للمتغير x نجد ان

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots =$$

$$x + \left(1 + \tfrac{1}{2}a_0\right)x^2 + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}a_1\right)x^3 + \left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12}a_2\right)x^4 + \cdots \qquad (\mathbf{53.2})$$

بمساواة المعاملات ذات الأس المتشابه للمتغير x للمعادلة (53.2) ينتج

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \tfrac{1}{2!}, \quad a_4 = \tfrac{1}{3!}$$

وبعموم $\quad a_n = \tfrac{1}{n!}, \qquad n \geq 1 \ , \ a_0 = 0$

الحل في شكل متسلسل يمكن كتابته بالشكل التالي

$$\emptyset(x) = x\left(1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots\right)$$

والذي يتقارب الي الحل الصحيح

$$\emptyset(x) = xe^{x}$$

2 – 4 - 2 طريقة تحويل لابلاس [3], [4], [20]

(Laplace Transform Method)

يعتبر تحويل لابلاس من أحد الطرق المفيدة لحل بعض أنواع معادلات فولتيرا التكاملية وهو ما يعرف بنظرية الالتفاف.

- **تحويل لابلاس.**

أذا كانت $g(y)$ دالة معرفة بحيث $y \geq 0$ ، فإن التكامل $\int_0^{\infty} e^{-sy} g(y)$ هو تحويل لابلاس لهذه الدالة إلى الصورة $G(s)$ ويرمز له كما يلي

$$\mathcal{L}\{g(y)\} = \int_0^{\infty} e^{-sy} g(y) dy = G(s)$$

لجميع قيم s التي يكون عندها التكامل المعتل متقارب.

لتحويل لابلاس عدد من الخواص

1- الخطية: يعتبر تحويل لابلاس مؤثر خطي، اي انه اذا كانت g و f دالتين معرفتين بحيث $y \geq 0$ ، وكان a و b ثوابت فإن

$$\mathcal{L}\{ag(y) + bf(y)\} = a\mathcal{L}\{g(y)\} + b\mathcal{L}\{f(y)\} = aG(s) + bF(s)$$

2- الأزحة الاولي

$$\mathcal{L}\{e^{at} g(y)\} = G(s-a)$$

3- تحويل المشتقات

$$\mathcal{L}\{g'(y)\} = s\,G(s) - g(0)$$

جدول (2 - 1) يبين تحويل لابلاس لبعض الدوال المهمة.

$g(y)$	$G(s) = \mathcal{L}\{g(y)\}$
1	$\frac{1}{s}$
y^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $, n = 1,2, \dots$
y^k	$\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$ $, k > -1$
e^{ay}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin ay$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos ay$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$y^n e^{ay}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ $, n = 1,2, \dots$
$y \sin ay$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$y \cos ay$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$e^{ay} \sin by$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{ay} \cos by$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

جدول (2 - 1)

في تطبيقات تحويل لابلاس فإننا كثيراً ما نحتاج لحساب $g(y)$ بمعلومية $G(s)$، وتسمي هذه العملية بمعكوس تحويل لابلاس ويشار إليه كما يلي

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(y) \qquad \textbf{(54.2)}$$

تعريف 2 - 4 - 2

الالتفاف (Convolution)

إذا كانت g و f دالتين متصلتين مقطعياً اي لها عدد محدود من نقط عدم الاتصال المحدود خلال

الفترة $[0,\infty)$، فإن التكامل $\int_0^y g(\tau)f(y-\tau)d\tau$ يسمي بالتفاف الدالتين g و f ويشار أليه كما يلي

$$(g*f)(\mathrm{y}) = \int_0^{\tau} g(\tau)f(y-\tau)d\tau \qquad (55.2)$$

ناتج الالتفاف $g*f$ هو دالة جديدة في y.

- **نظرية الالتفاف**

إذا كانت g و f دالتين متصلتين مقطعياً خلال الفترة $[0,\infty)$، فإن تحويل لابلاس لحاصل التفاف هاتين الدالتين يعطي مباشرة بالعلاقة الآتية

$$\mathcal{L}\{g*f\} = \mathcal{L}\{g(y)\}\mathcal{L}\{f(y)\} = G(s)F(s) \qquad (56.2)$$

نأخذ حل معادلة فولتيرا من النوع الثاني بحيث تكون النواة غير متصلة بطريقة لابلاس مع نظرية الالتفاف

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x-y)\emptyset(y)dy \qquad (57.2)$$

والتي من مفهوم الالتفاف يمكن كتابتها على الصورة

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda(k*\emptyset)(x)$$

وبأخذ تحويل لابلاس لطرفي هذه المعادلة ينتج

$$\mathcal{L}\{\emptyset(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\} + \lambda\, \mathcal{L}\{(k*\emptyset)(x)\}$$

$$\rightarrow \Phi(s) = G(s) + \lambda K(s)\Phi(s)$$

$$\therefore \Phi(s) = \frac{G(S)}{1-\lambda K(S)} \quad , \lambda K(s) \neq 1$$

ألان بأخذ معكوس لابلاس للطرفين نحصل على حل المعادلة (56.2) من العلاقة

$$\emptyset(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{G(s)}}{1-\lambda\mathrm{K(s)}}\right\} \tag{58.2}$$

مثال 2 - 6

باستخدام طريقة تحويل لابلاس اوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية الآتية

$$\emptyset(x) = \mathrm{e}^{x} - \cos x - 2\int_0^x e^{x-y}\emptyset(\mathrm{y})\mathrm{dy}$$

الحل

نواة المعادلة المعطاة هي من النوع الفرقي

حيث $g(x) = e^x - \cos x$ و $\lambda = -2$ و $k(x,y) = e^{x-y}$

$$G(s) = \mathcal{L}\{e^x - \cos x\} = \mathcal{L}\{e^x\} - \mathcal{L}\{\cos x\} = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1}$$

$$K(s) = \mathcal{L}\{e^z\} = \frac{1}{s-1} \quad , \quad z = x - y$$

$$\emptyset(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{1-\lambda K(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{1}{s-1}\right)-\left(\frac{s}{s^2+1}\right)}{1-(-2)\left(\frac{1}{s-1}\right)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin x$$

2 - 5 وجود ووحدانية الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية [21]

نظرية الوجود والوحدانية

إذا كانت الدالة $g(x)$ في المعادلة التكاملية لفولتيرا من النوع الثاني التي تأخذ الشكل التالي.

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)dy$$

متصلة خلال الفترة $[a,b]$، وكانت النواة $k(x,y)$ دالة متصلة ومحددة في المنطقة المثلثةR، شكل (2-2)، حيث

$$a \le x \le b \quad , \quad a \le y \le x$$

عندها يكون للمعادلة حل وحيد $\emptyset$ لأي قيمة لـ λ.

الإثبات

بالرجوع الي الملحق (ج) يمكن الاطلاع على الاثبات كاملاً.

3 - 6 القيم الذاتية والدوال الذاتية

- **القيم الذاتية والدوال الذاتية لمعادلة فريدهولم التكاملية [22]**

سوف يتم التطرق الي أحد الطرق لإيجاد حل لمعادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة من النوع الثاني والتي تكتب على الصورة

$$\emptyset(x) = \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)dy \qquad (81.2)$$

وإيجاد حل لهذه المعادلة بمسألة القيم الذاتية، من الواضح أن $\emptyset(x) = 0$ هو حل لـ (81.2) ولإيجاد حل غير هذا الحل البديهي سوف نطبق طريقة الحساب المباشر أو طريقة النواة القابلة للفصل السابق شرحها لحساب قيمة (أو القيم) لـ λ التي تعطي قيم غير صفرية لـ α وتؤدي بالتالي إلى حل (أو حلول) غير الحل البديهي $\emptyset(x) = 0$.

تطبيق طريقة الحساب المباشر يتطلب إن تكون المعادلة من النوع القابل للفصل أي إن.

$$k(x,y) = u(x)v(y)$$

بالتعويض في (81.2) ينتج

$$\emptyset(x) = \lambda u(x) \int_a^b v(y)\emptyset(y)dy \qquad (\mathbf{82.2})$$

وبوضع

$$\alpha = \int_a^b v(y)\emptyset(y)dy$$

وبالتعويض من جديد في (82.2) نصل إلى الحل

$$\emptyset(x) = \lambda\alpha u(x)$$

من الملاحظ هنا إن $\alpha = 0$ تعطي الحل البديهي $\emptyset(x) = 0$.

في حالة معادلة فريدهولم المتجانسة نجد إن طريقة الحساب المباشر هي تقليص للمعادلة التكاملية إلى نظام معادلات جبرية متجانسة. تسمي قيم λ التي تجعل هذا النظام متجانس له حل غير بديهي بالقيم الذاتية للنواة بينما تسمي دوال الحل $\emptyset(x)$ المناظرة لهذه القيم بالدوال الذاتية للمعادلة.

مثال 2 - 8

اوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية.

$$\emptyset(x) = \tfrac{2}{\pi}\lambda \int_0^\pi \cos(x+y)\emptyset(y)dy$$

الحل

النواة المعطاة غير قابلة للفصل ولكن بفك دالة الجيب نجد إن

$$k(x,y) = \cos(x+y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

وهي نواة قابلة للفصل. ألان نعوض عن مفكوك دالة جيب التمام في المعادلة المعطاة

$$\emptyset(x) = \tfrac{2}{\pi}\lambda \cos x \int_0^\pi \cos y\, \emptyset(y)dy + \tfrac{2}{\pi}\lambda \sin x \int_0^\pi \sin y\, \emptyset(y)dy$$

$$\therefore \quad \emptyset(x) = \tfrac{2}{\pi}\lambda(\alpha \cos x + \beta \sin x) \qquad (\mathbf{83.2})$$

حيث

$$\alpha = \int_0^\pi \cos x\, \emptyset(y)dy \quad , \quad \beta = \int_0^\pi \sin x\, \emptyset(y)dy \qquad (\mathbf{84.2})$$

بتعويض (83.2) في (84.2) نحصل على المعادلتين الجبريتين.

$$\alpha = \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^{\pi} (\alpha \cos^2 y + \beta \cos y \sin y) dy \qquad \rightarrow \alpha - \lambda\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^{\pi} (\alpha \sin y \cos y + \beta \sin^2 y) dy \qquad \rightarrow \beta + \lambda\beta = 0$$

ولتسهيل حل هاتين المعادلتين سنكبتهما على الصيغة المصفوفية الآتية

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد إن القيم الذاتية للنواة هي

$$\lambda_1 = 1 \qquad , \qquad \lambda_2 = -1$$

وتكون قيم α و β كما يلي

$$\lambda = \lambda_1 = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = A, \quad \beta = 0 \qquad \text{عند}$$

$$\lambda = \lambda_2 = -1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = B \qquad \text{عند}$$

حيث B, A هي ثوابت اختيارية وبالتالي تكون الدوال الذاتية المناظرة لهذه القيم هي

$$\emptyset_1(x) = \frac{2}{\pi} A \cos x \qquad , \qquad \emptyset_2(x) = \frac{2}{\pi} B \sin x$$

والتي تمثل حلولاً للمعادلة التكاملية المعطاة.

- **القيم الذاتية والدوال الذاتية لمعادلة فولتيرا التكاملية [23].**

مبرهنة 2 - 1

لتكن $k(x,y)$ نواة فولتيرا ذات مربع قابل للمكاملة في $[a,b] \times [a,b]$ لا يملك المؤثر المرافق K^* في $L^2[a,b]$ قيم ذاتية معلومة

البرهان

لتكن $\frac{1}{\lambda}$ قيمة ذاتية معلومة للمؤثر K^* إذن توجد دالة ذاتية $\emptyset \neq 0$ يحقق العلاقة:

$$\frac{1}{\lambda}\emptyset = K\emptyset$$

بحيث إن

$$\emptyset = \lambda K \emptyset = \lambda^2 K^2 \emptyset = \cdots = \lambda^n K^n \emptyset \qquad \forall \quad n \in N$$

نبرهن أن

$$|\lambda^n K^n \emptyset(x)| \to 0$$

$$n \to \infty$$

وهذا تناقض

ملاحظة

بما أن معادلة فولتيرا التكاملية لا تملك قيماً ذاتية، فإن هذه المعادلات ليس لها دوال ذاتية. وبالتالي فإن المعادلة المتجانسة لفولتيرا تقبل الحل الصفري.

الباب الثالث

الطرق العددية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني

Solution of Fredholm and Volterra Integral Equation of second kind using numerical methods

الباب الثالث: - الطرق العددية لحل معادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني

3-1 مقدمة

3-2 بعض الطرق العددية لحل معادلة فريدهولم التكاملية

3-2-1 طريقة التقريبية للنواة القابلة للفصل

3-2-2 طريقة نيستروم (التربيعية)

3-3 بعض الطرق العددية لحل معادلة فولتيرا التكاملية

3-3-1 طريقة قاعدة شبه المنحرف التربيعية

3-3-2 طريقة رانج - كوتا التقريبية

3 - 1 مقدمة

تختلف الطرق العددية عن الطرق التحليلية بأن النتائج التي نحصل عليها في الطرق العددية تكون تقريبية علي عكس الطرق التحليلية الذي تعطينا نتائج بدقة.

نرغب باستخدام الطرق العددية طالما انه بالإمكان الحصول على نتائج دقيقة بطرق التحليلية في الحقيقة لا تستطيع الطرق التحليلية حتى الآن حساب جميع المسائل الرياضية على الرغم من حاجتنا الشديدة في جميع المجالات لحلها، فضلا عن كون بعض الطرق التحليلية ذات كلفة باهظة، لذا نلجأ إلى الطرق العددية للحصول على الحل التقريبي بحيث يكون مقدار الخطأ أصغر ما يمكن.

يمكن تصنيف حلول المعادلات التكاملية كغيرها من المعادلات الرياضية إلى نوعين من الحلول لكل منها طرق ونظريات خاصة، ويمكن تحديد هذه الانواع فيما يلي:

- الحل المضبوط.
- الحل التقريبي.

الحل المضبوط هو حل تحليلي تكون فيه الدالة $\emptyset = \emptyset(x)$ على هيئة معادلة تعطي الحل الدقيق للمعادلة التكاملية، إما الحل التقريبي فليس له صيغة تحليلية ولكن يتم فيه حساب قيم عددية للدالة $\emptyset(x)$ عند قيم مختارة لـ x .

الحل المضبوط بلا شك هو الأفضل ولكن في كثير من التطبيقات يصعب إيجاد هذا الحل الأمر الذي يستدعي التفكير في حل تقريبي او تطبيق إحدى الطرق العددية لإيجاد حل عددي.

3 - 2 بعض الطرق العددية لحل معادلة فريدهولم التكاملية

يوجد العديد من الطرق العددية لحل معادلة فريدهولم التكاملية، وهنا نركز اهتمامنا على الطرق العددية التالية:

- طريقة النواة القابلة للفصل التقريبية (سلسلة تايلور).
- طريقة نيستروم (التربيعية).

هذه الطرق لها متغيرات متكررة، وهناك أيضا العديد من الطرق الأخرى، ولكن هذه الطرق تشمل اغلب الطرق العامة والأكثر استخداما".

3 – 2 - 1 طريقة النواة القابلة للفصل التقريبية [24]، [25]

(Degenerate Kernel approximation methods)

تم مناقشة طريقة النواة المنفصلة في الباب الثاني (1-2-2) لحل معادلة فريدهولم التكاملية:

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_D k(x,y)\emptyset(y)dy, \qquad x \in D \qquad (\mathbf{1.3})$$

مع $\lambda \neq 0$ و $D \subset R^m$، للقيم $m \geq 1$. حيث D مجموعة مغلقة ومحددة.

كما عرفنا إن النواة $k(x,y)$ قابلة لكي تكون منفصلة إذا أمكن التعبير عنها كمجموع عدد من الحدود المنتهية، بحيث تكون حاصل ضرب دالة في x فقط وكذلك دالة في y فقط على النحو التالي:

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)v_i(y) \qquad (\mathbf{2.3})$$

لكن اغلب دوال الأنوية $k(x,y)$ ليست منفصلة، وبالتالي نبحث في هذا الفصل على صيغة تقريبية لتلك الدوال باستخدام طريقة النواة غير المتصلة.

حل المعادلات التكاملية باستخدام طريقة النواة المنفصلة (غير المتصلة)

بالنظر إلى المعادلة التكاملية فإن دالة النواة $k(x,y)$ سيتم تقريبها عن طريق متوالية من الدوال المنفصلة.

$$k_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}u_{i,n}(x)v_{i,n}(\mathrm{y}),\qquad n\geq 1 \tag{3.3}$$

بحيث المؤثر K_n يحقق

$$\lim_{n\to\infty}\|K-K_n\|=0 \tag{4.3}$$

والمؤثر يتم تعريفه كما يلي

$$\mathrm{K}_n\emptyset(x)=\int_{\mathrm{D}}k_n(x,y)\emptyset(\mathrm{y})\mathrm{dy},\quad x\in D,\quad \emptyset\in C(D),\ \ n\geq 1 \tag{5.3}$$

بحيث D عبارة عن المجموعة الحدية المغلقة في R^m، لقيم $m\geq 1$، وباستخدام $X=C(D)$

و $\|\cdot\|_\infty$، لكي تكون $K: C(D)\to C(D)$ مدمجة.

يمكن كتابة المعادلة التكاملية (1.3) في صيغة المؤثر كما يلي

$$(\mathrm{I}-\lambda\mathrm{K})\emptyset=g \tag{6.3}$$

وبالتالي فإن المعادلة (6.3) يمكن كتابتها باستخدام المعادلة (5.3) كالتالي:

$$(I-\lambda K_n)\emptyset_n=g \tag{7.3}$$

حيث إن $\emptyset_n$ هو الحل للمعادلة. باستخدام صيغة المعادلة (3.3) للدالة $k_n(x,y)$ فإن المعادلة التكاملية (7.3) تصبح:

$$\emptyset_n(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} u_{i,n}(x) \int_{D} v_{i,n}(y)\emptyset_n(y)dy \qquad (8.3)$$

وباستخدام الطريقة التي تم مناقشتها في الجزء (1-2-2) يكون لدينا:

$$\emptyset_n(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x), \qquad (9.3)$$

حيث:

$$\alpha_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\alpha_k = h_i \qquad , \qquad i = 1, \dots, n; \qquad (10.3)$$

لكي

$$h_i = \int v_i(y)g(y)dy \qquad (11.3)$$

و

$$c_{ik} = \int v_i(y)\, u_k(y)dy \qquad (12.3)$$

عبارة عن ثوابت معلومة. وكما تمت الإشارة إليه في الجزء (1-2-2) فإن المعادلة (10.3) تمثل نظام متكون من n من المعادلات الجبرية للقيم المجهولة α_i والتي محددها $D(\lambda)$ معطاة كما يلي

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda c_{11} & -\lambda c_{12} & \dots & -\lambda c_{1n} \\ -\lambda c_{21} & 1-\lambda c_{22} & \dots & -\lambda c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\lambda c_{n1} & -\lambda c_{n2} & \dots & 1-\lambda c_{nn} \end{vmatrix} \qquad (13.3)$$

والتي هي عبارة عن متعددات حدود في λ وفي الغالب بدرجة n، والتي لا تساوي صفر. ولتحليل حل المعادلة (13.3) باستخدام طريقة النواة المنفصلة، يكون لدينا الحالات التالية:

الحالة (1)

عندما على الأقل أحد أجزاء الطرف الأيمن لمنظومة المعادلات (9.3) h_1 و$, h_2, \dots, h_n$ لا تساوي صفر، فإن الحالتان التاليتان تندرجان تحت الحالة الاتية:

- **أ-** إذا كان $D(\lambda) \neq 0$، فإن الحل الوحيد الذي لا يساوي صفر لمنظومة المعادلات (10.3) يكون موجود، والمعادلة (1.3) لها حل وحيد لا يساوي صفر ويكون معطي بالدالة (9.3).
- **ب-** إذا كان $D(\lambda) = 0$، فإن منظومة المعادلات (10.3) إما إن يكون ليس لديه حل او يكون له حل لا نهائي لذا فان المعادلة (1.3) إما ليس لديها حل او يكون لها حل لا نهائي.

الحالة (2)

عندما $g(x) = 0$، فان المعادلة (11.3) أظهرت إن $h_i = 0$ لقيم $i = 1,2, \dots, n$ بالتالي منظومة المعادلات (10.3) يختصر إلى نظام معادلة خطية متجانسة. الحالتان التاليتان تندرجان تحت الحالة الاتية:

- **أ-** إذا كان $D(\lambda) \neq 0$، بالتالي الحل الصفري وحيد $(\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0)$ لمنظومة المعادلات (10.3) يكون موجود، لذا نري إن (3.1) لها حل صفري وحيد $\emptyset_n(x) = 0$
- **ب-** إذا كان $D(\lambda) = 0$، بالتالي منظومة المعادلات (10.3) يؤول إلى حلول غير صفرية لانهائية، لذا فان المعادلة (1.3) يكون لها حلول غير صفرية لانهائية، وقيم λ عندما $D(\lambda) = 0$ تكون معلومة كقيم ذاتية وأي حل غير صفري لمعادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة $\emptyset(x) = \int_{\mathrm{D}} k(x, y)\emptyset(y)dy$، يكون معلوم كدالة ذاتية مطابقة للمعادلة التكاملية.

الحالة (3)

عندما $g(x) \neq 0$ لكن:

$$\int_{\mathrm{D}} g(y)v_1(y) = 0, \quad \int_{D} g(y)v_2(y) = 0, \dots, \int_{D} g(y)v_n(y) = 0 \qquad (\mathbf{14.3})$$

أي $g(x)$ متعامدة لكل الدوال

$$v_1(\mathrm{y}), v_2(\mathrm{y}), \dots, v_n(y) \qquad (\mathbf{15.3})$$

بالتالي

$h_1, h_2, \dots, h_n$ تساوي صفر وتختصر المعادلة (11.3) إلى نظام معادلات خطية متجانسة. الحالتان التاليتان يمكن أدراجهم تحت هذه الحالة:

أ- إذا كان $D(\lambda) \neq 0$، بالتالي الحل الصفري وحيد $(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0)$، لذا فان المعادلة (1.3) لها حل وحيد فقط $\emptyset_n(x) = 0$.

ب- إذا كان $D(\lambda) = 0$ فان منظومة المعادلات (10.3) يؤول إلى حلول غير صفرية لانهائية، والمعادلة (1.3) يكون لديها حلول غير صفرية لانهائية.

بالرجوع إلى تقريب النواة غير المنفصلة للحصول على تقريب منفصل، نستخدم تقريبات مختلفة لتقريب حل المعادلة التكاملية (1.3) وعلى سبيل المثال:

تقريب سلسلة تايلور

- تقريبات النواة المنفصلة التقريبية
- امتداد التعامد

سنتناول تقريب سلسلة تايلور فقط.

● تقريب سلسلة تايلور [25]، [26]، [27].

(Taylor series approximation)

دع $\emptyset(x,y)$ دالة متصلة في متغيرين x و y، عليه فإن امتداد سلسلة تايلور للدالة $\emptyset$ عند أي عدد حقيقي مجاور a باعتبار المتغير y يكون:

$$Taylor\ \ (\emptyset,y,a)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{y}-a)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial \mathrm{y}^n}\ \ \emptyset(x,a) \qquad (\mathbf{16.3})$$

و

$$Taylor(\emptyset,y,m,a)$$

$$=\sum_{n=0}^{m}\frac{(y-a)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}\ \ \emptyset(x,y$$

$$=a) \qquad (\mathbf{17.3})$$

هذا يعني امتداد سلسلة تايلور للحد m^{th} للدالة عند النقطة المجاورة a باعتبار المتغير y .

أعتبر معادلة تكاملية في بعد واحد.

$$\emptyset(x)=g(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\emptyset(y)dy, \qquad a\le x\le b \qquad (\mathbf{18.3})$$

يمكن كتابة $k(x,y)$ علي شكل سلسلة قوي في y باستخدام تايلور (k,y,a)، عليه

$$k(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}q_i(x)(y-a)^i \qquad (\mathbf{19.3})$$

أو سلسلة قوي في x باستخدام تايلور (k,x,a)، عليه

$$k(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty} q_i(y)(x-a)^i \qquad (20.3)$$

افرض $k_n(x, y)$ تشير إلى المجموع الجزئي للحدود n الأولي للطرف الأيمن للمعادلة (19.3)

$$k_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i(x)(\mathrm{y} - a)^i \qquad (\mathbf{21.3})$$

باستخدام الترميز في المعادلة (2.3)، $k_n(x, y)$ تعتبر نواة منحلة بـ

$$u_i(x) = \mathrm{q}_{i-1}(x), \qquad v_i(\mathrm{y}) = (\mathrm{y} - a)^{i-1}, \qquad i = 1,2, \dots, n \qquad (\mathbf{22.3})$$

النظام الخطي (14.3) مع (13.3) يصبح

$$\alpha_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_a^b (\mathrm{y} - a)^{i-1} \mathrm{q}_{k-1}(\mathrm{y}) \mathrm{dy}$$
$$= \int_a^b g(y)(y - a)^{i-1} dy, \;\; i = 1, \dots, n \qquad (\mathbf{23.3})$$

والحل $\emptyset_n$ يمكن التعبير عنه بواسطة

$$\emptyset_n(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}\, g_i(x) \qquad (\mathbf{24.3})$$

التكاملات في المعادلة (23.3) ثم حسابها عددياً، على أية حال، الملاحظات التالية تعتبر ضرورية:

أ- التكاملات تتضمن كل الفترة $[a, b]$.

ب- معظم التكاملات تكون صفرية او كمية صغيرة، في الحيز المجاور لـ $y = a$، وهو نهاية الباقي من التكامل.

3 - 2 - 2 طريقة نيستروم (التربيعية) [22]، [28].

(Nyström Quadrature method)

تستخدم طريقة نيستروم لمعالجة التقريبات علي أساس التكامل العددي للمعامل التكاملي بالمعادلة (1.3). ثم إيجاد الحل أولا عند مجموعة نقاط العقد التربيعية، ثم تشمل كل النقاط في D بواسطة صيغة استكمال خاصة. الطريقة العددية تعتبر بسيطة في عملية تنفذيها بالحاسوب. لإيجاد الحل لمعادلة فريدهولم التكاملية (1.3) بواسطة طريقة نيستروم نستخدم التكامل العددي.

$$\int_D h(y)dy \approx \sum_{j=1}^{k_n} w_{n,j} h(x_{n,j}), \qquad h \in C(D) \qquad (25.3)$$

بزيادة متتالية لقيم n. افرض إن التكامل العددي لكل $h \in D$ يتقارب إلى التكامل الصحيح كلما $n \to \infty$.

للتبسيط، نحذف الحروف السفلية n بحيث تصبح $w_{n,j} \equiv w_j$ ، $x_{n,j} \equiv x_j$ وأحياناً $k_n \equiv k$، لكن يجب إن ندرك وجود الرمز n ضمنياً.

دع دالة النواة متصلة لكل $x, y \in D$ عندما D تكون مغلقة ومجموعة محدودة في R^m لبعض $m \geq 1$. بتقريب التكامل في المعادلة (1.3) مستخدماً المخطط التربيعي في المعادلة (25.3) يمكن الحصول على معادلة جديدة

$$\emptyset_n(x) - \lambda \sum_{j=1}^{k_n} w_j k(x, x_j) \emptyset_n(x_j) = g(x_i), \qquad x \in D \qquad (26.3)$$

بحيث حل المعادلة $\emptyset_n(x)$ يكون حلاً تقريبياً للحل الصحيح $\emptyset(x)$ للمعادلة (3.1). الحل لصيغة الدالة (26.3) يمكن الحصول عليه إذا ما تم تعيين $x_i's$ إلى المتغير x بحيث $i = 1, \dots, k_n$ و

$x_i \in D$. في هذه الطريقة، (26.3) يمكن اختزالها إلى مجموعة من المعادلات

$$\emptyset_n(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^{k_n} w_j\, k(x_i, x_j)\phi_n(x_j) = g(x_i), \qquad i = 1, \dots, k_n \qquad \mathbf{(27.3)}$$

وهي منظومة خطية من الرتبة k_n. والمجهول عبارة عن متجه

$$\emptyset_n \equiv [\emptyset_n(x_1), \dots, \emptyset_n(x_q)]^t$$

كل حل $\emptyset_n(x)$ من المعادلة (26.3) يعتبر حل للمعادلة (27.3): وهذا نحصل عليه بتقدير $\emptyset_n(x)$ عند النقاط العقدية. لكل حل $\underline{u} = [u_1, \dots, u_k]^t$ من المعادلة (27.3)، يوجد حل وحيد للمعادلة (26.3) الذي يتفق مع u عند النقاط العقدية. إذا أردنا إيجاد الحل لـ $\emptyset_n(x)$ في المعادلة (26.3)، عليه $\emptyset_n(x)$ يمكن تحديدها بواسطة قيمها عند النقاط العقدية (x_j). عليه الحل لـ $\underline{u}$ للمعادلة (27.3)، نعرف

$$u(x) = \lambda \sum_{j=1}^{k_n} w_j\, k(x, x_j)u_j + g(x), \qquad x \in D \qquad \mathbf{(28.3)}$$

وتُعرف هذه الصيغة بصيغة الاستكمال

$$u(x_i) = \lambda \sum_{j=1}^{k_n} w_j\, k(x_i, x_j)u_j + g(x_i),$$

$$= u_i \qquad for \quad i = 1, \dots, k_n$$

المعادلة (28.3) تسمي صيغة استكمال نيستروم.

الخطوة الأخيرة من u تعتبر الحل للمعادلة (27.3). باستخدام هذا الاستكمال الناتج من المعادلة (28.3)، نستنج بإن $u(x)$ عبارة عن حل المعادلة (26.3). وحدانية العلاقة ما بين $\underline{u}$ و $u(x)$

ناتجة من الحل $\emptyset_n(x)$.عليه المعادلة (27.3) يمكن التعبير عنها بواسطة

$$(I - \lambda KD)\, \emptyset_n = g, \qquad \mathbf{(29.3)}$$

عندما

$$\emptyset_n = [\emptyset_n(x_i)]^t, \qquad g = [g(x_i)]^t, \qquad K = \left[k\left(x_i, x_j\right)\right],$$

و

$$D = diag(w_1, w_2, \dots, w_k).$$

من المفيد إن نلاحظ بان $(I - \lambda KD)$ يمكن إن تكون شاذة للطريقة التربيعية للمعادلة (25.3). تحت قيود ملائمة، كذلك يمكننا الحصول على الغير شاذة لـ $(I - \lambda KD)$ إذا كانت المعادلة (25.3) دقيقة بشكل كافئ.

بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت الطريقة التربيعية أكثر دقة أو لا فإنها تعتمد على λ، و $k(x, y)$ و $g(x)$.

3 – 3 بعض الطرق العددية لحل معادلة فولتيرا التكاملية

يوجد العديد من الطرق العددية متوفرة لحل معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني، ولبعض تلك الطرق: الطريقة التربيعية قاعدة شبه المنحرف، الطريقة التقريبية رانج – كوتا من الدرجة الثانية، رانج – كوتا من الدرجة الرابعة.

3 - 3 - 1 الطريقة التربيعية لحل معادلة فولتيرا التكاملية [29].

إذا أردنا إيجاد الحل العددي لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني:

$$\emptyset(x) = g(x) + \int_a^x k\big(x, y, \emptyset(y)\big)dy, \qquad a \le x \le b \tag{30.3}$$

نفترض أن الحل مطلوب للفترة المحددة $[a, b]$، وأن الدالة $g(x)$ مستمرة في $[a, b]$، و k مستمرة في $a \le y \le x \le b$ وتحقق شروط لبشز (Lipschitz) المنتظمة في $\emptyset$. هذه الشروط سوف تضمن بأن الحل مستمر ووحيد للمعادلة (30.3) موجود. إذا كانت النواة خطية يعني وجود الدالة k لكي:

$$k\big(x, y, \emptyset(y)\big) = k(x, y)\emptyset(y) + k_0(x, y) \tag{31.3}$$

لكل $a \le y \le x \le b$ فإنه يمكن القول بأن المعادلة (30.3) تكون خطية ويمكن اختصارها إلي:

$$\emptyset(x) = \overline{g(x)} + \int_a^x k(x, y)\emptyset(y)dy, \qquad a \le x \le b \tag{32.3}$$

عندما

$$\overline{g(x)} = g(x) + \int_a^x k_0(x, y)\emptyset(y)dy \tag{33.3}$$

يجب إن نتعامل مع المعادلة (32.3) في الصيغة المتعارف عليها لمعادلة فولتيرا الخطية وسوف لن يتم التميز بالرموز بين $\overline{g(x)}, g(x)$.

<u>الطريقة التربيعية للمعادلات الخطية</u> [30].

خطوات الحل العددي هو تقريب طرف التكامل في المعادلة (32.3) عن طريق قاعدة التربيع وذلك بإجراء تكامل بالنسبة للمتغير y وبثبوت القيمة x. انه من الطبيعي إن يتم اختيار ارتباط منتظم في x و y؛ وبالتالي بوضع $x = x_i = a + ih$ حيث إن $h = (b - a)/N$ عبارة عن طول الخطوة الثابتة. يتضح من ذلك بإن هناك تقريب بشكل واضح لطرف التكامل في المعادلة

الخطية (32.3) عن طريق:

$$\int_a^{x_i} k(x_i,y)\emptyset(y)dy \approx h\sum_{j=0}^{i} w_{ij}k(x_i,y_j)\emptyset(y_j) = h\sum_{j=0}^{i} w_{ij}k_{ij}\emptyset(y_j) \qquad \textbf{(34.3)}$$

حيث $x_i = y_i$, $i = 0,1,\dots,N$ هذه القاعدة التربيعية تؤدي إلى مجموعة المعادلات التالية:

$$\emptyset(x_0) = g(x_0),$$

$$\emptyset(x_1) = g(x_1) + h[w_{10}k_{10}\emptyset(y_0) + w_{11}k_{11}\emptyset(y_1)] + E_{1,y}\big(k(x_1,y)\emptyset(y)\big),$$

$$\emptyset(x_i) = g(x_i) + h\sum_{j=0}^{i} w_{ij}k_{ij}\emptyset(y_j) + E_{i,y}\big(k(x_i,y)\emptyset(y)\big), \quad i = 0,1,2,\dots,N \qquad \textbf{(35.3)}$$

حيث $E_{i,y}\big(k(x_i,y)\emptyset(y)\big)$ تمثل طرف الخطأ في القاعدة التربيعية. إذا تم افتراض بإن $E_{i,y}$ مهملة و $(1 - hw_{ii}k_{ii}) \neq 0$ لأي عدد i نستطيع بوضوح حل هذه المجموعة من المعادلات لـ $\emptyset_i$ و $i = 0,1,2,\dots,N$ حيث $\emptyset_i$ عبارة عن تقريب لـ $\emptyset(x_i)$ عن طريق التعويض المباشر. من الواضح إن هذا الأسلوب العددي يعتبر مباشراً جداً وسهل التطبيق، على الرغم من وجود بعض الصعوبات في اختيار الأوزان (weights) المناسبة w_{ij}. ونلاحظ بأنه لكل i فإن المجموعة $\{w_{ij}, j = 0,1,\dots,i\}$ تمثل أوزان القاعدة التربيعية للنقطة $(i+1)$ من النوع نيوتن - كوتس (Newton-Cotes) (نقاط متساوية البعد) للفترة $[0, ih]$.

- **قاعدة شبه المنحرف [30]، [31] و [32].**

(Trapezoidal rule)

اذا تم وضع $a < b \in \mathbb{R}$.وتقسيم الفترة (a,b) إلى فترات فرعية متساوية الطول $h = \frac{b-a}{N}$.
حيث ان $1 \le i \le N+1$, $x_i = a + (i-1)h$ ، عليه بالتالي فان قاعدة شبه المنحرف يتم قراءتها كما يلي:

$$\int_a^b g(x)dx = h\left[\frac{g(a)+g(b)}{2} + \sum_{i=2}^{N-1} g(x_i)\right] \qquad (36.3)$$

وباستخدام تقريب شبه المنحرف لحل معادلة فولتيرا التكاملية:

$$\emptyset(x) - \lambda \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)dy = g(x) \qquad (37.3)$$

وبتعويض (36.3) في (37.3) بقيمة x_i، نتحصل علي:

$$\emptyset(x_i) - h\left[\frac{k(x_i,a)\emptyset(a)+k(x_i,x_i)\emptyset(x_i)}{2} + \sum_{j=2}^{i-1} k(x_i,x_j)\emptyset(x_j)\right] = g(x_i) \qquad (38.3)$$

$$1 \le i \le N+1, \quad x_1 = a, x_2, \dots, x_{N+1} = b$$

$$-h\frac{k(x_i,a)}{2}\emptyset(a) - h\sum_{j=2}^{i-1} k(x_i,x_j)\emptyset(x_j) + \left(1 - h\frac{k(x_i,x_i)}{2}\right)\emptyset(x_i) = g(x_i)$$

ولقيمة $i = 1$ ، $x_1 = a$، فأن معادلة فولتيرا التكاملية (37.3) يمكن اختصارها إلي:

$$\emptyset(a) = g(a)$$

ولقيمة $i = 2$، نتحصل علي:

$$h\frac{k(x_2,x_1)}{2}\emptyset(x_1) + \left(1 - h\frac{k(x_2,x_2)}{2}\right)\emptyset(x_2) = g(x_2)$$

ولقيمة $i = 3$، نتحصل علي:

$$-h\frac{k(x_3,x_1)}{2}\emptyset(x_1) - hk(x_3,x_2)\emptyset(x_2) + \left(1 - h\frac{k(x_3,x_3)}{2}\right)\emptyset(x_3) = g(x_3)$$

عند هذه النهاية نتحصل على النظام الخطي:

$$A\overline{\emptyset} = B$$

حيث إن المصفوفة $A = (a_{ij})$ ، $1 \le i, j \le N+1$ تكون كما يلي:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & \forall\, j \le i+1 \\ a_{ij} = -hk(x_i, x_j), & 2 \le j \le n+1 \\ a_{ii} = 1 - \frac{h}{2}k(x_i, x_i) & \\ a_{11} = 1 & \\ a_{i1} = -\frac{h}{2}k(x_i, x_1), & 1 \le i \le n+1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{N+1,1} & a_{N+1,2} & \cdots & \cdots & a_{N+1,N+1} \end{bmatrix}$$

$$B = [g(x_1) = g(a), g(x_2), \dots, g(x_{N+1}) = g(b)]^T,$$

$$\overline{\emptyset} = [\emptyset(a), \emptyset(x_2), \dots, \emptyset(x_{N+1})]^T\ .$$

3 - 3 - 2 طريقة رانج - كوتا التقريبية [15] ، [33].

(Runge - Kutta Approximation method)

تعتبر طرق رانج - كوتا لحل المعادلة (30.3) عن طرق تحليل عددي لمسائل القيم الابتدائية والتي تقوم على أساس حساب التقريبات إلى الحل عند نقاط $x_i = a + ih$، $i = 0,1,\dots,N,$ عن طريق إنشاء تقريبات عند نقاط متوسطة $[x_i, x_{i+1}], i = 0,1,2,\dots,N$

$$x_i + \theta_r h, \quad i = 0,1,2,\dots,N-1, \quad r = 1,2,\dots,p-1,$$

حيث

$$\theta = \theta_0 \le \theta_1 \le \dots \le \theta_{p-1} \le 1$$

وبإعادة استخدام رانج – كوتا العامة للمرحلة p $(p - stage)$ لمسألة القيمة الابتدائية

$$\emptyset'(x) = g\big(x, \emptyset(x)\big)$$

$$\emptyset(a) = \emptyset_{0,} \qquad (\mathbf{39.3})$$

والمعطاة عن طريق

$$\emptyset_{i+1} = \emptyset_i + h\sum_{i=0}^{p-1} A_{pi}k_i^i \qquad (\mathbf{40.3})$$

حيث

$$k_0^i = g(a + ih, \emptyset_i)$$

$$k_r^i = g\left(a + (i+\theta_r)h, \emptyset_i + h\sum_{i=0}^{r-1} A_{ri}k_i^i\right), \quad r = 1,2,\dots,p-1 \qquad (\mathbf{41.3})$$

$$\sum_{i=0}^{r-1} A_{ri} = \begin{Bmatrix} \theta_r, r = 1,2, \dots, p-1 \\ 1, \qquad\qquad r = p \end{Bmatrix} \tag{42.3}$$

مع $\emptyset_r$ عبارة عن تقريب للحل عند $x = x_r = a + rh$. المسألة الثانية k_r^i يمكن اعتبارها كتقريب إلى $\emptyset(a + (i + \theta_r)h)$ ، ونعيد كتابة المعادلة (40.3) كالتالي:

$$\emptyset_{i+1} = \emptyset_i + h \sum_{i=0}^{p-1} A_{pi} g\big(x_i + \theta_i h, \emptyset_{i+\theta_i}\big) \tag{43.3}$$

المتغيرات θ_i, A_{pi} يتم اختيارها عملياً لتحقيق تقريب نهائي لدرجة محددة، بخطأ موضعي $O(h^{q+1})$ لبعض قيم q التي تم اختيارها والتي تمثل درجة الطريقة. هذا الشرط يحقق مجموعة من المعادلات غير الخطية للمتغيرات غير المعلومة.

مثال 1 - 3

بافتراض انه اخترنا $p = 2$ في المعادلة (43.3). عليه:

$$\emptyset_{i+1} = \emptyset_i + hA_{20}g(x_i, \emptyset_i) + hA_{21}g\big(x_i + \theta_1 h, \emptyset_i + hA_{10}g(x_i, \emptyset_i)\big).$$

باستخدام نظرية تايلور لدالة من متغيرين للحصول علي:

$$\emptyset_{i+1} = \emptyset_i + h(A_{20} + A_{21})g + h^2 A_{21}(\theta_1 g_x + A_{10} g g_\emptyset) + O(h^3)$$

تُعرف الرموز التالية:

$$g = g(x_i, \emptyset_i) \ , \qquad g_x = \frac{\partial_g(x_i,\emptyset_i)}{\partial x} \ , \qquad g_\emptyset = \frac{\partial_g(x_i,\emptyset_i)}{\partial \emptyset}$$

بمقارنة هذا الطرف من المعادلة مع الطرف التالي:

$$\emptyset_{i+1} = \emptyset_i + hg + \tfrac{1}{2}h^2(g_x + g g_\emptyset) + \varphi(h^3)$$

بالتالي يكون لدينا مجموعة مكونة من ثلاثة معادلات كما يلي:

$$A_{20} + A_{21} = 1$$

$$A_{21}\theta_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_{21}A_{10} = \frac{1}{2}$$

من الواضح انه يوجد عدد لانهائي من الحلول لهذه المعادلات تتطابق مع عدد لانهائي في المرحلة الثانية لمعادلة رانج – كوتا ذو الدرجة الثانية. نأخذ في الاعتبار وبشكل محدد حلين اثنين من الناحية العلمية وهما:

أ- عندما $A_{20} = A_{21} = \frac{1}{2}$ ، فإن الطريقة الناتجة هي:

$$\emptyset_{i+1} = \emptyset_i + \frac{1}{2}h\left[x_i, \emptyset_i + g\left(x_{i+1}, \emptyset_i + hg(x_i, \emptyset_i)\right)\right] \qquad \mathbf{(44.3)}$$

أو

$$\emptyset_{i+1} = \emptyset_i + \frac{1}{2}h\left[g(x_i, \emptyset_i) + g\left(x_i, \widehat{\emptyset}_{i+1}\right)\right] \qquad \mathbf{(45.3)}$$

حيث

$$\widehat{\emptyset}_{i+1} = \emptyset_i + hg(x_i, \emptyset_i) \qquad \mathbf{(46.3)}$$

وتعرف هذه طريقة بطريقة أويلر المعدلة.

ب- عندما $A_{21} = 1, A_{20} = 0$، فإن الطريقة المستخدمة هي طريقة أويلر المعدلة معطاة كما يلي:

$$\emptyset_{i+1} = \emptyset_i + hg\left(x_i + \frac{1}{2}h, \emptyset_i + \frac{1}{2}hg(x_i, \emptyset_i)\right) \qquad \mathbf{(47.3)}$$

وعندما $p = q = 4$، فنتحصل بنفس الطريقة على طريقة رانج – كوتا الاعتيادية ذو الدرجة (الرتبة) الرابعة معطاة بالخيارات التالية من المتغيرات:

$$\theta_0 = 0, \qquad \theta_1 = \theta_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad \theta_3 = 1,$$

$$A_{10} = \tfrac{1}{2}, \quad A_{20} = 0, \qquad A_{21} = \tfrac{1}{2},$$

$$A_{30} = A_{31} = 0, \qquad\qquad A_{32} = 1,$$

$$A_{40} = A_{43} = \tfrac{1}{6}, \qquad A_{41} = A_{42} = \tfrac{1}{3},$$

الطريقة التي تم تعريفها في المعادلة (43.3) يمكن تمديدها لتعطي نوع من طريقة رانج – كوتا للحل التالي:

$$\emptyset(x) = g(x) + \int_a^x k\big(x, y, \emptyset(y)\big)dy, \qquad a \le x \le b \tag{48.3}$$

وبوضع $x = x_i$ في المعادلة (48.3) يكون لدينا:

$$\emptyset(x_i) = g(x_i) + \int_a^{a+ih} k\big(a + ih, y, \emptyset(y)\big)dy, \qquad i = 0,1, \dots, N$$

$$= g(x_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} k\big(a + ih, y, \emptyset(y)\big)dy, \qquad i = 0,1, \dots, N \tag{49.3}$$

ويمكن حساب تقريب x_i إلى $\emptyset(x_i)$ من المعادلة التالية:

$$\emptyset(x_i) = g(x_i) + h \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{i=0}^{p-1} A_{pi}\, k\big(a + ih, a + (j + \theta_i)h, \emptyset_{j+\theta_i}\big) \tag{50.3}$$

ألان لكل قيم $x \in (x_i, x_{i+1})$ يمكن كتابة المعادلة (48.3) في الصيغة التالية:

$$\emptyset(x) = g(x) + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x, y, \emptyset(y))dy + \int_{x_j}^{x} k(x, y, \emptyset(y))dy \qquad (\mathbf{51.3})$$

بعد ذلك بوضع $x = x_i + \theta_v h,\ \ v = 1,2, \dots, p-1$ وبتقريب طرف التكامل النهائي في المعادلة (51.3) عن طريق:

$$\int_{x_i}^{x_i+\theta_v h} k(x_i + \theta_v h, y, \emptyset(y))dy \approx h \sum_{i=0}^{v-1} A_{vi} k(x_i + \theta_v h, x_i + \theta_i h, \emptyset_{i+\theta_i})$$

نجد إن طريقة رانج – كوتا للمعادلة (48.3) يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$\begin{aligned}\emptyset_{i+\theta_i} &= g(x_i + \theta_v h) \\ &\quad + h \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{i=0}^{p-1} A_{pi} k(x_i + \theta_v h, x_j + \theta_i h, \emptyset_{j+\theta_i}) \\ &\quad + h \sum_{i=0}^{v-1} A_{vi} k(x_i + \theta_v h, x_i + \theta_i h, \emptyset_{i+\theta_i}), \qquad (\mathbf{52.3})\end{aligned}$$

$$i = 0,1, \dots, N-1, \qquad v = 1,2, \dots, p-1$$

حيث $\emptyset(a) = g(a)$ والمتغيرات, $A_{rj},\ \ \theta_j$ تحدد نوع الطريقة

حيث $j = 0,1, \dots, p-1.,\ \ r = 1,2, \dots, p$

الباب الرابع

خوارزميات الحل لمعادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني

Algorithms for Fredholm and Volterra Integral Equation of the second kind

الباب الرابع: - خوارزميات الحل لمعادلتي فريدهولم وفولتيرا التكاملية من النوع الثاني

4-1 مقدمة

4-2 الحل العددي لمعادلة فريدهولم التكاملية

4-2-1 الحل العددي باستخدام طريقة النواة القابلة للفصل

4-2-2 الحل العددي باستخدام طريقة نيستروم

4-3 تحليل الخطأ لمعادلة فريدهولم التكاملية

4-4 الحل العددي لمعادلة فولتيرا التكاملية

4-4-1 الحل العددي باستخدام طريقة قاعدة شبه المنحرف

4-4-2 الحل العددي باستخدام طريقة رانج - كوتا

4 – 1 مقدمة

تقوم الطرق العددية كما نعلم باستخدام الخوارزميات للوصول إلى حلول تقريبية للمسائل الرياضية وتقيم مقدار الخطاء لكل طريقة.

في هذا الباب سوف نقوم بتطبيق الطرق العددية لإيجاد الحل التقريبي لمعادلة فريدهولم وفولتيرا التكاملية.

لقد تم استعرض الطرق العددية في الباب الثالث، عليه سوف نقوم بإيجاد الحل العددي لبعض الأمثلة عددياً ومقارنتها بالحل التحليلي.

الطرق العددية تتضمن طريقة النواة القابلة للفصل وطريقة نيستروم لمعادلة فريدهولم، وطريقة قاعدة شبه المنحرف وطريقة رانج - كوتا لمعادلة فولتيرا، عليه سوف نقوم باستخدام الخوارزميات المناسبة لكل طريقة وثم تنفيذها بإحد لغات البرمجة المتاحة (لغة ماتلاب) وذلك لأجراء الحسابات ومقارنة الحلول الصحيحة والحلول التقريبية لعدد من النقاط n .

4 - 2 الحل العددي لمعادلة فريدهولم التكاملية

مثال 4 – 1

معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

$$\emptyset(x) = -\frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x-y)\,\emptyset(y)dy \qquad (\mathbf{1.4})$$

الحل الصحيح للمعادلة (1.4) عبارة عن:

$$\emptyset(x) = \sin x$$

4 - 2 - 1 الحل العددي باستخدام طريقة النواة القابلة للفصل

(Numerical solution by using kernel degenerate method)

بداية نعمل على امتداد النواة $k(x,y)$، وبالنسبة للمتغير y باستخدام متسلسلة تايلور.

$$Taylor(k,y,a)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(y-a)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}k(x,y=a) \qquad (2.4)$$

بحيث m تعبر عن عدد حدود سلسلة تايلور، بهذا الامتداد، النواة يمكن إعادة كتابتها كمجموع دالتين منفصلتين، واحدة بالنسبة لـ x، والثانية بالنسبة لـ y.

$$k_m(x,y)=\sum_{i=0}^{m-1}u_i(x)v_i(y) \qquad (3.4)$$

حيث

$$u_{i-1}(x)=\left(\frac{1}{i!}\right)\frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}}k(x,a) \qquad (4.4)$$

و

$$v_{i-1}(y)=(y-a)^{i-1},\quad \forall\, i=1,2,\dots,m, \qquad (5.4)$$

عليه يمكننا حساب القيم c_{ij}، و h_i، بالشكل التالي

$$c_{ij}=\int_a^b v_i(y)u_j(y)dy,\qquad h_i=\int_a^b v_i(y)g(y)dy,\quad i=1,2,\dots,m \qquad (6.4)$$

باستخدام العلاقات الموجودة (1-2-2) والعلاقة السابقة، نتحصل

$$\alpha_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\alpha_j=h_i \qquad i=1,\dots,n \qquad (7.4)$$

ثم نضع هذه العلاقات في شكل مصفوفة نتحصل علي

$$A[\alpha_i] = H,$$

حيث

$$A = I - \lambda C$$

بحيث I تعبر عن مصفوفة الوحدة

$$C = [c_{ij}], \qquad \forall\, i, j = 1,2, \dots, m,$$

$$H = [h_i], \quad \forall i = 1,2, \dots, m.$$

والمصفوفة

$$[\alpha_i] = A^{-1}H$$

الحل $\emptyset_m$ يعطي بـ

$$\emptyset_m(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{i+1} g_i(x) \qquad (\mathbf{8.4})$$

الخوارزمية التالية توضح **طريقة النواة المنفصلة** باستخدام **Matlab**.

خوارزمية 4 - 1

1- أدخال $a, b, \lambda, g(x), k(x,y)$

2- أدخال عدد حدود سلسلة تايلور m

3- أحسب امتداد تايلور للنواة $k(x,y)$ بالنسبة لـ y

$$Taylor(k, y, a) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(y-a)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} k(x, y = a) \qquad (\mathbf{9.4})$$

من $\emptyset$ أوجد $u_i(x)$ و $v_i(y)$ حيث $i = 1,2,\dots,m$

4- أحسب $c_{ik} = \int_a^b v_i(y)u_k(y)dy$ حيث $i,k = 1,2,\dots,m$

5- أحسب $h_i = \int_a^b v_i(y)g(y)dy$ حيث $i = 1,2,\dots,m$

6- أحسب المصفوفة

$$A = \begin{vmatrix} 1-\lambda C_{11} & -\lambda c_{12} & \dots & -\lambda C_{1m} \\ -\lambda c_{21} & 1-\lambda c_{22} & \cdots & -\lambda c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\lambda c_{m1} & -\lambda c_{m2} & \cdots & 1-\lambda c_{mm} \end{vmatrix}$$

7- أحسب المحدد $D(A)$ للمصفوفة A

8- إذا كان $g(x) \neq 0$ أذهب الي الخطوة 12

9- إذا كان $D(A) = 0$ فإن المنظومة عندها عدد من الحلول غير منتهي، أذهب الي الخطوة 15

10- المنظومة لها حل وحيد $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m$، أذهب ال الخطوة 15

11- إذا كان $h_i \neq 0$، أذهب الي الخطوة 15

12- إذا كان $D(A) = 0$ فإن المنظومة عندها عدد لانهائي من الحلول، أذهب الي الخطوة 15، المنظومة لها حل وحيد $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$

13- إذا كان $D(A) = 0$ المنظومة ليس لها حل حقيقي، أذهب الي الخطوة 15

14- حل المنظومة يكون $[\alpha_i] = [A_{ik}]^{-1}[h_i]^T$

عليه

$$\emptyset_m(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(x)$$

15- النهاية [25].

بتطبيق خوارزمية $(1-4)$ على النواة للمعادلة التكاملية $k(x,y)=\cos(x-y)$ يمكن العمل على امتدادها باستخدام سلسلة تايلور لـ 5 حدود.

$$Taylor(\cos(x-y),y,5)=$$

$$\cos(x)+y\sin(x)-\frac{y^2}{2}\cos(x)-\frac{y^3}{6}\sin(x)+\frac{y^4}{24}\cos(x) \qquad (\mathbf{10.4})$$

يعني

$$u_1(x)=\cos(x)$$

$$u_2(x)=\sin(x)$$

$$u_3(x)=\frac{-1}{2}\cos(x) \qquad (\mathbf{11.4})$$

$$u_4(x)=\frac{-1}{6}\sin(x)$$

$$u_5(x)=\frac{1}{24}\cos(x)$$

و

$$v_1(y)=1,\qquad v_2(y)=y,\ \ v_3(y)=y^2,\ \ v_4(y)=y^3,\ \ v_5(y)=y^4 \qquad (\mathbf{12.4})$$

وبرنامج الماتلاب أعطي النتائج التالية

المصفوفة

$C=$

1.0000	1.0000	-0.5000	-0.1667	0.0417
0.5708	1.0000	-0.2854	-0.1667	0.0238
0.4674	1.1416	-0.2337	-0.1903	0.0195
0.4510	1.4022	-0.2255	-0.2337	-0.1895
0.4793	1.8040	-0.2396	-0.3007	0.0200

المصفوفة

$$A = I - \lambda C =$$

-0.2732	-1.2732	0.6366	0.2122	-0.0531
-0.7268	-0.2732	0.3634	0.222	-0.0303
-0.5951	-1.4535	1.2976	0.2423	-0.0248
-0.5742	-0.7853	0.2871	1.2976	0.2413
-0.6102	-2.2970	03051	0.3828	0.9746

المصفوفة

$$[\alpha_i] = A^{-1}H =$$

0.8752
0.9251
1.0775
0.8782
1.7330

عليه

$$\emptyset_m(x_j) = \frac{-2}{\pi}\cos(x_j) + \frac{4}{\pi}[\alpha_i][u_i(x_j)], \quad i,j = 1,2,\dots,m \qquad (\mathbf{13.4})$$

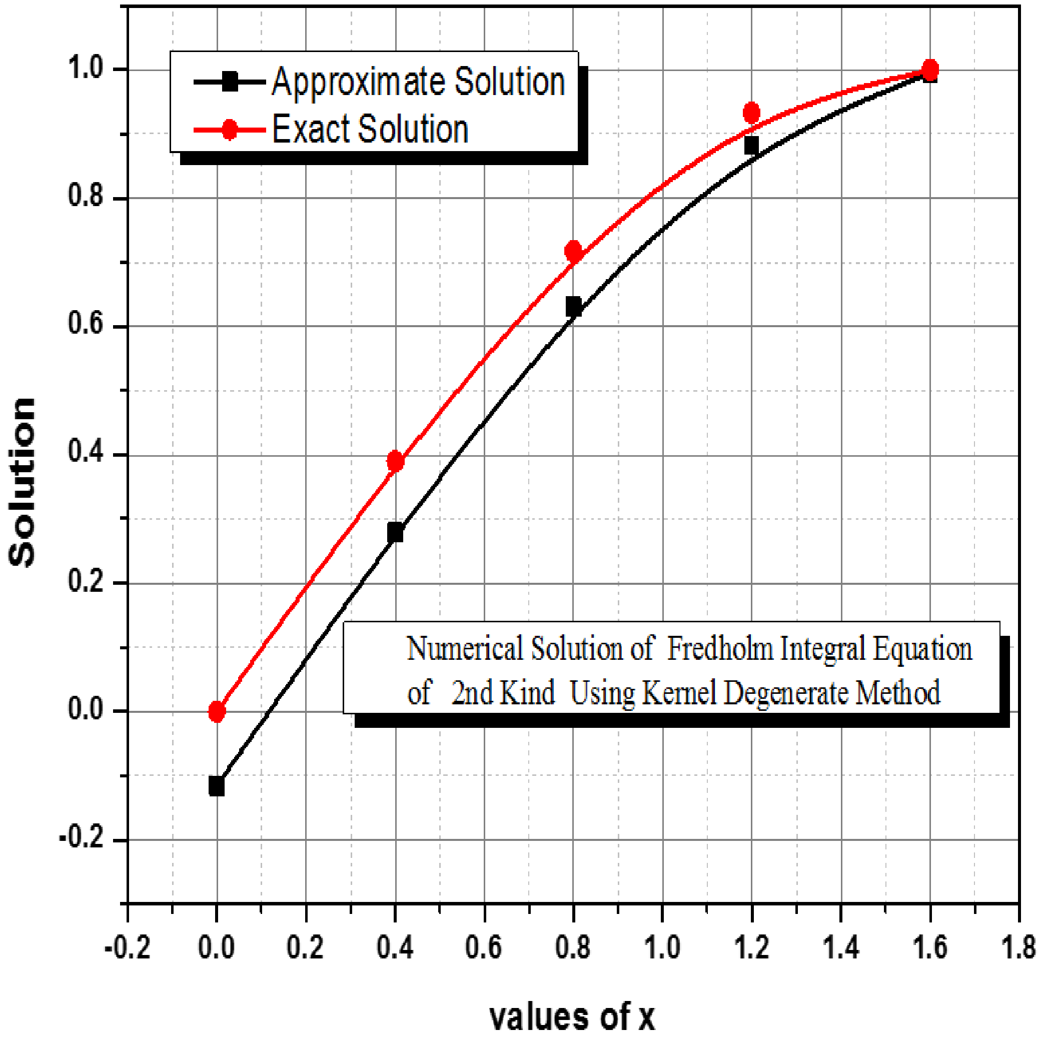
بحيث

$$x_{j+1} = x_j + \frac{(b-a)}{m-1}, \quad x_1 = a \qquad (\mathbf{14.4})$$

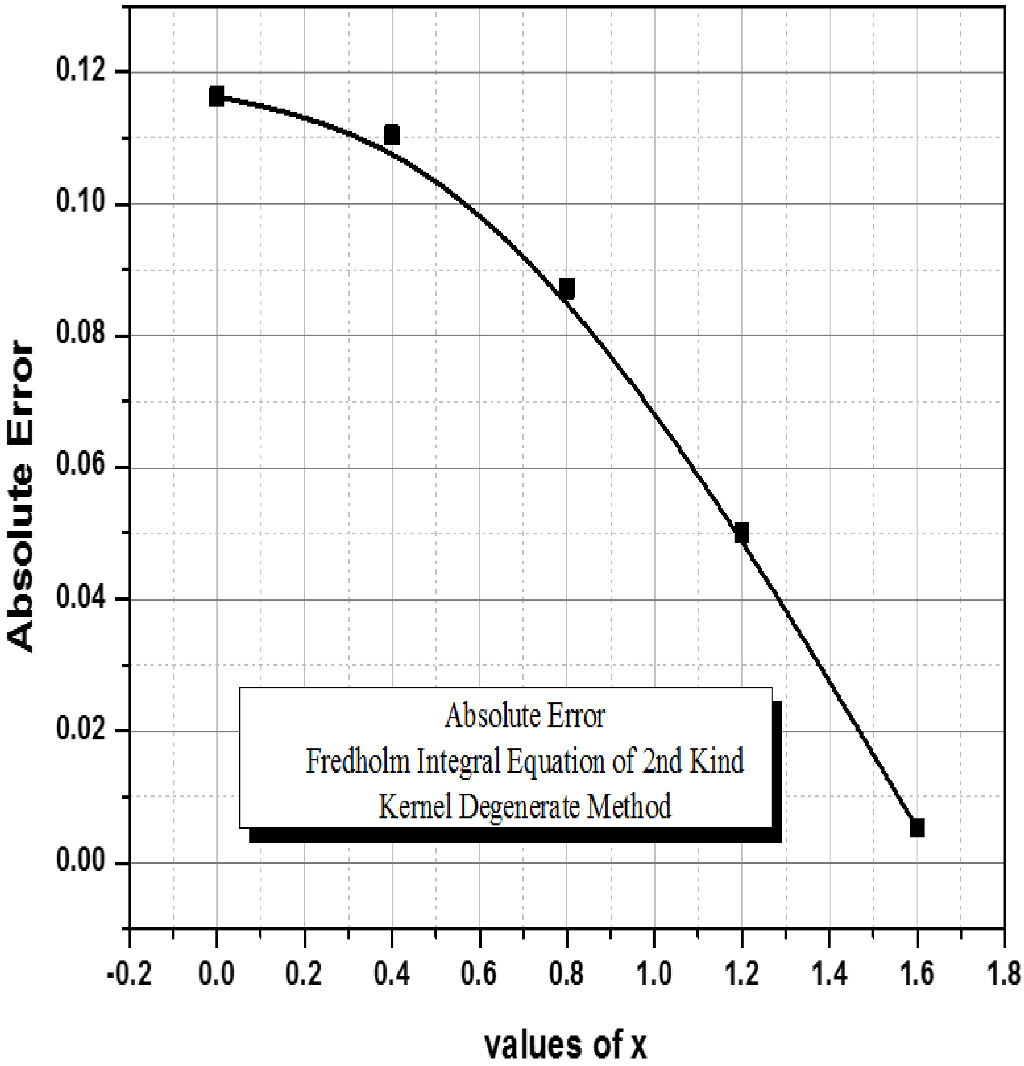
الجدول (1 - 4) يبين الحل الصحيح والحل العددي عندما كان حدود سلسلة تايلور $m = 5$، وكذلك يبين الخطأ الناتج لهذه الطريقة العددية.

الجدول (4 – 1): الحل الصحيح والعددي باستخدام خوارزمية 4 - 1 للمعادلة (1.4)

x	الحل التحليلي $y_1 = sin(x)$	الحل التقريبي y_2	الخطأ $E = \|y_1 - y_2\|$
0	0.000000	-0.116300	0.116300
0.4	0.389418	0.279000	0.110418
0.8	0.717356	0.630232	0.087124
1.2	0.932039	0.882007	0.050032
1.6	0.999574	0.994379	0.005194



الشكل (4 – 1): الحل الصحيح والعددي باستخدام خوارزمية 4 - 1 للمعادلة (1.4)



الشكل (4 – 2) نتائج الخطأ باستخدام الخوارزمية (4 – 1) للمعادلة (1.4)

4 - 2 - 2 الحل العددي باستخدام طريقة نيستروم

(The Numerical solution by using Nyström method)

لأيجاد الحل العددي لمعادلة التكاملية التالية

$\emptyset(x) = -\frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y)\,\emptyset(y)dy$

باستخدام طريقة نيستروم يجب اولاً ان نعرف النواة $\cos(x-y)$ وكذلك الدالة $(-\frac{2}{\pi}\cos(x))$ يجب ان تكون مستمرة، كذلك، يجب ان نعرف بأنه تقريبي، يمكننا تقريب التكامل $\int_a^b \emptyset(y)dy$ باستخدام الطريقة التربيعية $\sum_{j=0}^{n} w_j \emptyset(y_j)$. بواسطة هذا التقريب، لـ $a \le x \le b$ معادلة فريدهولم التكاملية تصبح

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_D k(x,y)\,\emptyset(y)dy, \quad x \in D \qquad (\mathbf{15.4})$$

هذه الصيغة يمكن اختزالها لتصبح

$$\emptyset_n(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} w_j\, k(x, x_j)\,\emptyset_n(x_j) + g(x), \qquad (\mathbf{16.4})$$

بحيث $\emptyset_n(x)$ يكون حل تقريبي للحل الصحيح $\emptyset(x)$ للمعادلة (15.4).

الحل لمعادلة (16.4) يمكن الحصول عليه إذا ما تم تحديد $x_i^{'}s$ الي x بحيث $i = 1,2,\dots,n$ و $a \le x_i \le b$. بهذه الطريقة، المعادلة (16.4) يمكن اختزالها الي مجموعة من المعادلات

$$\emptyset_n(x_i) = \lambda \sum_{j=1}^{n} w_j k(x_i, x_j)\,\emptyset_n(x_j) + g(x_i), \qquad (\mathbf{17.4})$$

كما يمكن كتابة المعادلة (17.4) شكل مصفوفة علي النحو

$$\Phi = \lambda KD\Phi + G \quad \rightarrow \quad \Phi - \lambda KD\Phi = G \quad \rightarrow \quad (I - \lambda KD)\Phi = G \qquad (\mathbf{18.4})$$

بحيث

$$\Phi = [\emptyset_n(x_i)]^t, \quad G = [g(x_i)]^t, \quad K = \left[k\left(x_i, x_j\right)\right]$$

$$D = diag(w_1, , w_2, \dots, w_n)$$

من المفيد باستخدام طريقة **قاعدة شبه المنحرف** للتقريب التكامل، يتم تطبيق ذلك بالشكل التالي

$$\int_a^b k(x,y)dy = \sum_{\substack{j=1\\ i=1}}^{n} w_j k\left(x_i, x_j\right) = DK \qquad (\mathbf{19.4})$$

بحيث D هي المصفوفة القطرية وعناصر هذه المصفوفة القطرية تساوي h، بحيث h تعتمد على القيم الحدية للفترة $[a,b]$، وكذلك تعتمد على عدد التقريبات n بحيث $h = \frac{b-a}{n}$.

عناصر المصفوفة k تحتوي على $k\left(x_i, x_j\right)$، بحيث $i,j = 1,2,\dots,n$، والتقريبات $x_i's$ يمكن الحصول عليها $x_i = a + (i-1)h$، بحيث $i = 1,2,\dots,n$ و $x_1 = a$.

الخوارزمية التالية تبين **طريقة نيستروم** باستخدام برنامج **Matlab**

خوارزمية 4 – 2

أدخل $a, b, n, \lambda, g(x), k(x,y)$

$$h \rightarrow \frac{b-a}{n}$$

$$x_1 = a, x_n = b$$

$$for\ i = 2\ to\ n-1$$

$$x_i = a + (i-1)h$$

end

$for\ i = 1\ to\ n$

$G_i = g(x_i)$

$s_i = x_i$

المصفوفة القطرية $D_{ii} = h \to D$

$for\ j = 1\ to\ n$

$K_{ij} = k(x_i, x_j)$

end

end

المصفوفة الوحدة $I \to$

$\iota hs \to I - \lambda DK$

الإجابة $\Phi \to$ لـ $\iota hs * \emptyset = k$

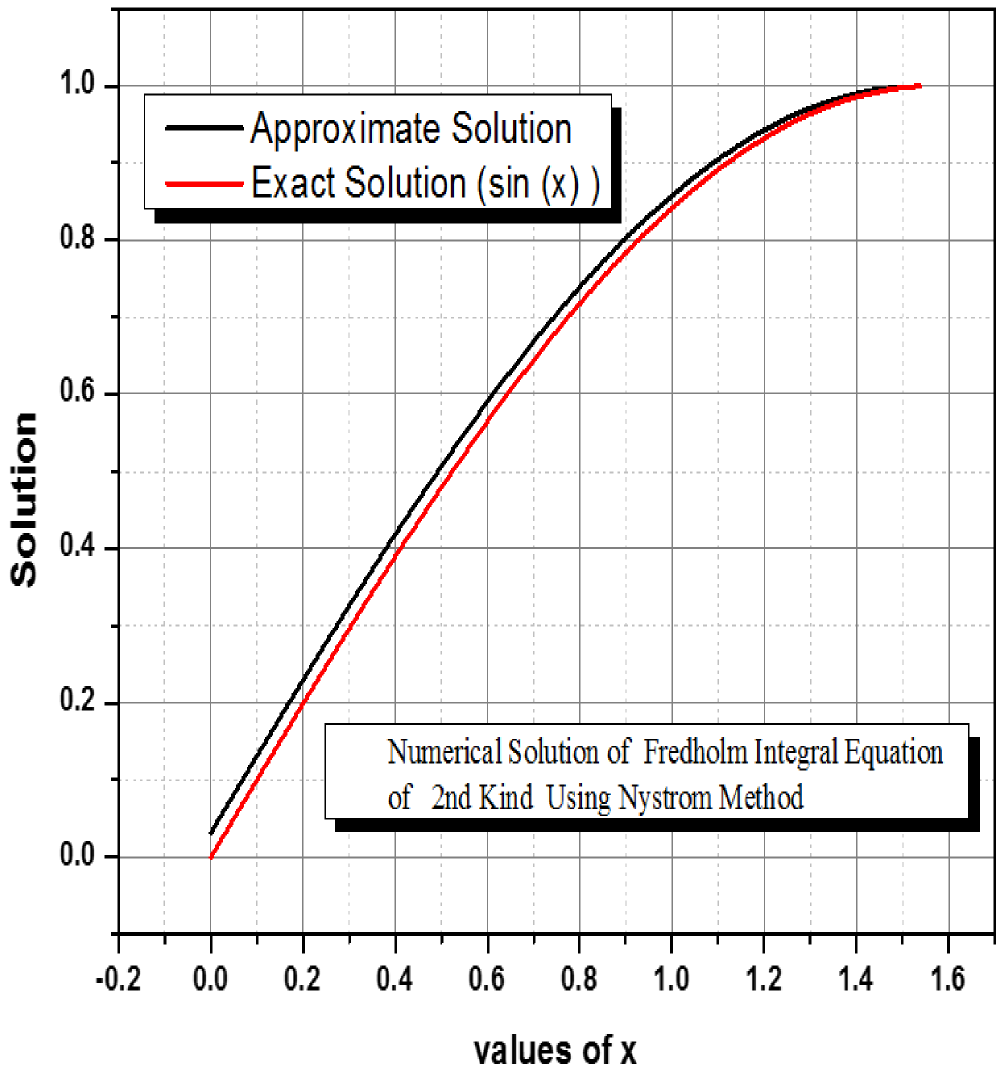
متعددة الحدود استكماليه $p(\emptyset)$ عند $[s_i, \emptyset_i]$

الجدول (4 - 2) يبين الحل الصحيح وكذلك الحل التقريبي عند $n = 50$ كذلك يبين الخطأ الناتج باستخدام هذه الطريقة العددية.

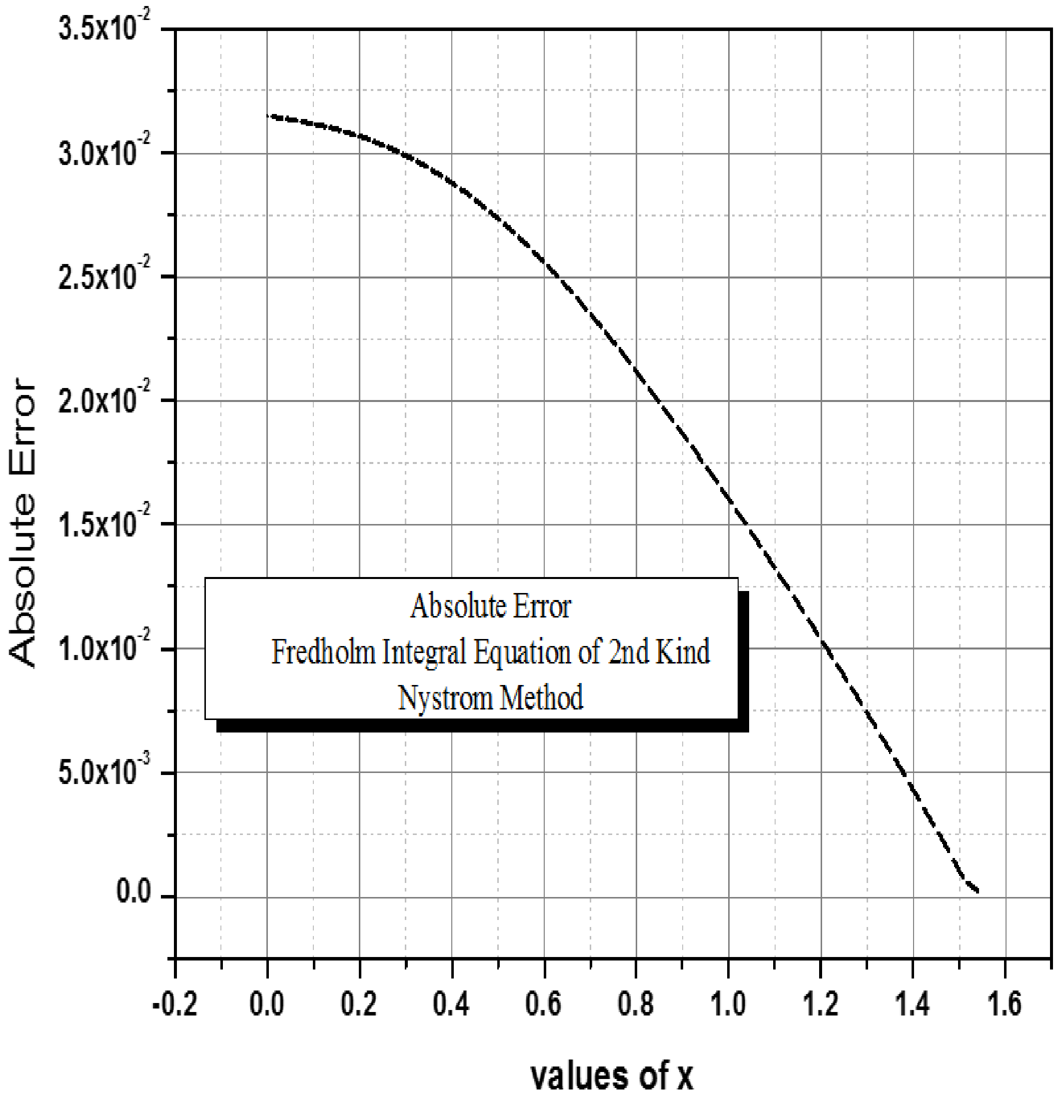
الجدول (4 - 2): الحل الصحيح والعددي باستخدام خوارزمية 4 - 2 للمعادلة (4.1)

x	الحل التحليلي $y_1 = \sin(x)$	الحل التقريبي y_2	الخطأ $E = \lvert y_1 - y_2 \rvert$
0.000000	0.0000000000000000	0.0314700000000000	0.0314700000000000
0.031400	0.0313948403970313	0.0627745028482724	0.0313796624512410
0.062800	0.0627587292804297	0.0940402606996792	0.0312815314192495
0.094200	0.0940607456510093	0.1252314396606800	0.0311706940096711
0.125600	0.1252700295083950	0.1563128646998360	0.0310428351914411
0.157000	0.1563558122752480	0.1872500196478060	0.0308942073725584
0.188400	0.1872874471313600	0.2180090471973520	0.0307216000659918
0.219800	0.2180344392277120	0.2485567489033350	0.0305223096756229
0.251200	0.2485664757507000	0.2788605851827160	0.0302941094320162
0.282600	0.2788534558069050	0.3088886753145570	0.0300352195076518
0.314000	0.3088655200989320	0.3386097974400200	0.0297442773410877
0.345400	0.3385730803630620	0.3679933885623670	0.0294203081993056
0.376800	0.3679468485397000	0.3970095445469630	0.0290626960072631
0.408200	0.3969578656478570	0.4256290201212680	0.0286711544734110
0.439600	0.4255775303352060	0.4538232288748480	0.0282456985396424
0.471000	0.4537776270755450	0.4815642432593650	0.0277866161838204
0.502400	0.4815303539859020	0.5088247945885850	0.0272944406026831
0.533800	0.5088083502358190	0.5355782730383710	0.0267699228025519
0.565200	0.5355847230218260	0.5617987276466880	0.0262140046248625
0.596600	0.5618330740804860	0.5874608663136020	0.0256277922331164
0.628000	0.5875275257138920	0.6125400558012770	0.0250125300873856
0.659400	0.6126427463019450	0.6370123217339810	0.0243695754320358
0.690800	0.6371539752762650	0.6608543485980780	0.0237003733218129
0.722200	0.6610370475311160	0.6840434797420360	0.0230064322109196
0.753600	0.6842684172472760	0.7065577173764210	0.0222893001291444
0.785000	0.7068251811053660	0.7283757225739000	0.0215505414685341
0.816400	0.7286851008657490	0.7494768152692410	0.0207917144034918
0.847800	0.7498266252927480	0.7698409742593120	0.0200143489665637
0.879200	0.7702289114015530	0.7894488372030810	0.0192199258015285
0.910600	0.7898718450068800	0.8082817006216160	0.0184098556147365
0.942000	0.8087360605531300	0.8263215198980870	0.0175854593449569
0.973400	0.8268029602064790	0.8435509092777620	0.0167479490712835
1.004800	0.8440547321900900	0.8599531418680110	0.0158984096779210
1.036200	0.8604743683443750	0.8755121496383040	0.0150377812939287
1.067600	0.8760456808949790	0.8902125234202110	0.0141668425252317
1.099000	0.8907533184119660	0.9040395129074030	0.0132861944954363
1.130400	0.9045827809444730	0.9169790266556490	0.0123962457111764
1.161800	0.9175204343159050	0.9290176320828230	0.0114971977669175
1.193200	0.9295535235655870	0.9401425554688940	0.0105890319033071

1.224600	0.9406701855236070	0.9503416819559350	0.0096714964323285
1.256000	0.9508594605064700	0.9596035555481190	0.0087440950416491
1.287400	0.9601113031220170	0.9679173791117170	0.0078060759897002
1.318800	0.9684165921729680	0.9752730143751030	0.0068564222021349
1.350200	0.9757671396493190	0.9816609819287500	0.0058938422794317
1.381600	0.9821556988007240	0.9870724612252310	0.0049167624245071
1.413000	0.9875759712809230	0.9914992905792210	0.0039233192982981
1.444400	0.9920226133571400	0.9949339671674920	0.0029113538103520
1.475800	0.9954912411783650	0.9973696470289220	0.0018784058505561
1.507200	0.9979784350972940	0.9988001450644820	0.0008217099671876
1.538600	0.9994817430416920	0.9992199350372500	0.0002618080044419



الشكل (4 – 3): الحل الصحيح والعددي باستخدام خوارزمية 4 - 2 للمعادلة (1.4)



الشكل (4 – 4) نتائج الخطأ باستخدام الخوارزمية (4 – 2) للمعادلة (1.4)

4 - 3 تحليل الخطأ في طريقة نيستروم [34] ، [35].

(The error analysis of the Nyström method)

إذا اعتبرنا طريقة التكامل العددية لشبه المنحرف

$$\int_a^b \emptyset(\mathrm{y})\mathrm{dy} \approx h\sum_{i=0}^{n}{}'' \ \emptyset(x_i) \qquad (20.4)$$

بـ $h = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a + ih$ عندما $i = 0,1,\dots,n$.

الترميز $\sum''$ يعني إن الحد الأول والأخير يضرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$ قبل إجراء عملية الجمع. لإيجاد الخطأ.

$$\int_a^b \emptyset(\mathrm{y})\mathrm{dy} - h\sum_{i=0}^{n}{}'' \emptyset(x_i) = -\frac{h^2(b-a)}{12}\emptyset''(\varepsilon_n), \quad \emptyset \in c^2[a,b], \quad n \geq 1 \qquad (21.4)$$

حيث ε_n نقطة تقع في الفترة $[a,b]$. ايضاً توجد صيغة خطأ تقريبية

$$\int_a^b \emptyset(\mathrm{y})\mathrm{dy} - h\sum_{i=0}^{n}{}'' \emptyset(x_i) = -\frac{h^2}{12}[\emptyset'(b) - \emptyset'(a)] + O(h^4), \quad \emptyset \in c^4[a,b], \qquad (22.4)$$

عندما يتم تطبيق ذلك على المعادلات التكاملية

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda\int_a^b k(x,y)\emptyset(y)dy, \quad a \leq x \leq b \qquad (23.4)$$

نحصل على منظومة خطية تقريبية

$$\emptyset_n(x_i) = g(x_i) + \lambda h\sum_{j=0}^{n}{}'' k(x_i,x_j)\emptyset_n(x_j), \quad i = 0,1,\dots,n \qquad (24.4)$$

بحيث رتبتها $q_n = n + 1$

صيغة استكمال نيستروم تعطي بـ

$$\emptyset_n(x) = g(x) + \lambda h \sum_{j=0}^{n}{}'' \, k(x, x_j)\emptyset_n(x_j), \qquad a \le x \le b \qquad \mathbf{(25.4)}$$

وسرعة تقارب الحل يعتمد على خطأ التكامل العددي

$$(\mathrm{K} - \mathrm{K}_n)\emptyset(\mathrm{y}) = -\frac{h^2(b-a)}{12}\left[\frac{\partial^2 k(x,y)\emptyset(y)}{\partial y^2}\right]_{\mathrm{y}=\varepsilon_n(x)} \qquad \mathbf{(26.4)}$$

بحيث $\varepsilon_n(x) \in [a, b]$. من المعادلة (22.4) خطأ التكامل التقديري يكون:

$$(\mathrm{K} - \mathrm{K}_n)\emptyset(\mathrm{y}) = -\frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial k(x,y)\emptyset(\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}}\right]_{\mathrm{y}=a}^{\mathrm{y}=b} + O(h^4) \qquad \mathbf{(27.4)}$$

من المعادلة (26.4)، نجد إن طريقة نيستروم تتقارب برتبة $O(h^2)$ ، بحيث $k(x, y)\emptyset(y)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق الثاني بالنسبة للمتغير y، ومتجانسة في المتغير x.

اظهرت النتائج انه باستخدام تطبيق الخوارزمية (4 - 2) نتحصل على نتائج مقبولة حيث كانت القيمة القصوى للحد المطلق $0.0003 \le O(h^2)$.

4 - 4 الحل العددي لمعادلة فولتيرا التكاملية

مثال 4 - 2

المعادلة التكاملية لفولتيرا من النوع الثاني

$$\emptyset(x) = 2e^{x} - x - 2 + \int_{0}^{x} (x-y)\emptyset(y)dy \qquad (\mathbf{28.4})$$

التي حلها الصحيح عبارة عن

$$\emptyset(x) = xe^{x}$$

4 - 4 - 1 الحل العددي باستخدام طريقة قاعدة شبه المنحرف

(Numerical solution by using method Trapezoidal rule)

خوارزمية الحل التالية تبين **طريقة قاعدة شبه المنحرف** باستخدام برنامج **Matlab**

خوارزمية 4 – 3

1- أدخال عدد الفترات الجزئية n من الفترة الكلية $[a, b]$

a, b: أدخال حدود الفترة $[a, b]$

gcn_g: دالة تعبر عن $g(x)$ في برنامج Matlab

gcn_k: دالة تعبر عن $k(x, y)$

2- حلقة دوران حسابية $(loop = 10)$.

3- أحسب طول الخطوة $h = \frac{(b-a)}{n}$

4- أحسب نقاط المتغير x التي سوف يتم عندها حساب الحل

$x = linspace(a, b, n + 1)$

5- أحسب متجه الدالة $g\_vec = gcn\_g(x)$

6- ضع متجه الحل بداية يساوي $\emptyset\_vec = zeros(size(x))$

7- ضع متجه الحل عند القيمة $\emptyset_{\_vec}(1) = g\_vec(1)$

8- أحسب من $i = 1:n$

التقدير الاولي لعملية التكرار $\emptyset\_vec(i+1) = \emptyset\_vec(i)$

$$k\_vec = gcn\_k\big(x(i+1), x(1:i+1)\big) * \emptyset_{\_vec}(1:i+1)$$

$$for\ \ j = 1: loop$$

طبق طريقة شبه المنحرف لأيجاد الحل

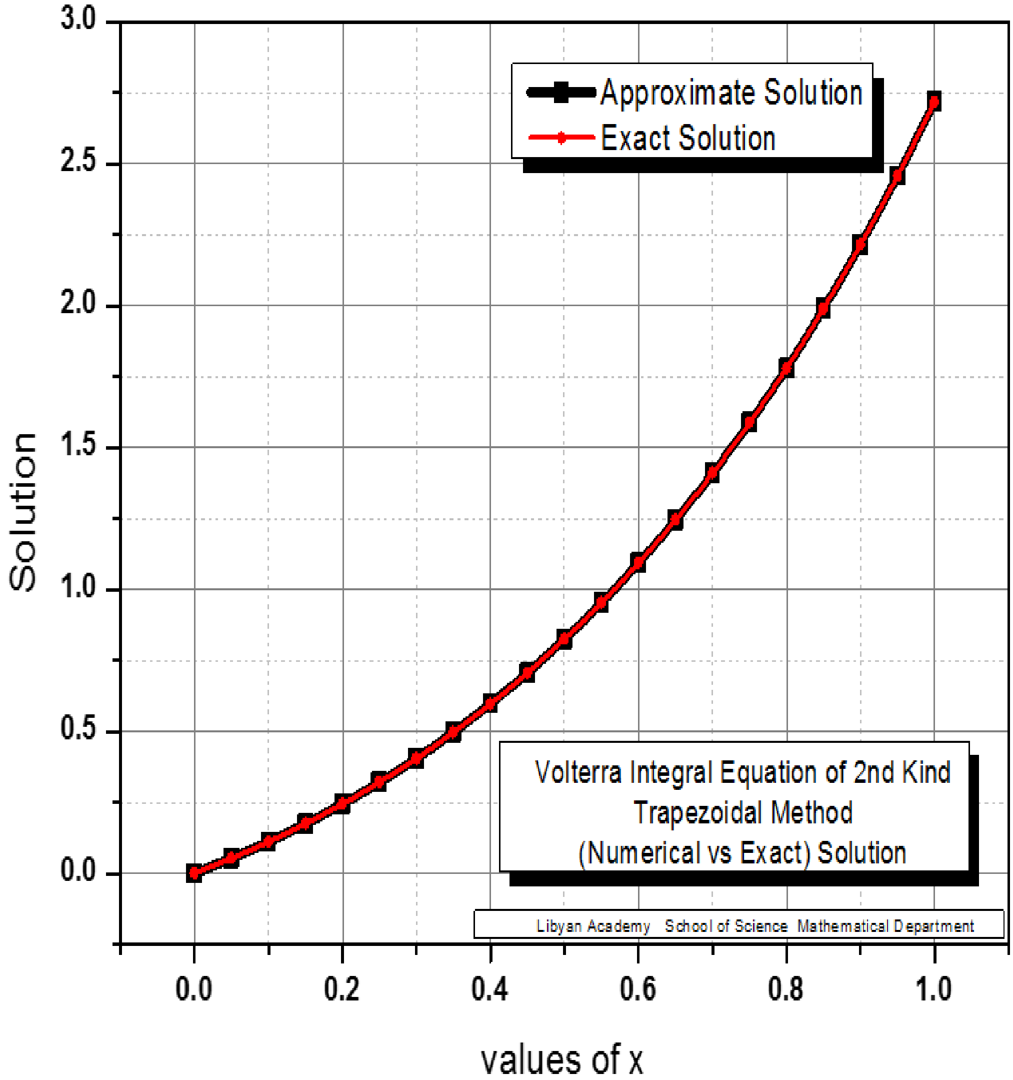
9- ضع $\emptyset = \emptyset\_vec$

10- الناتج الحل العددي $\emptyset(x)$. ونقاط الشبكة للمتغير x التي عندها يتم الحساب الحل التقريبي.

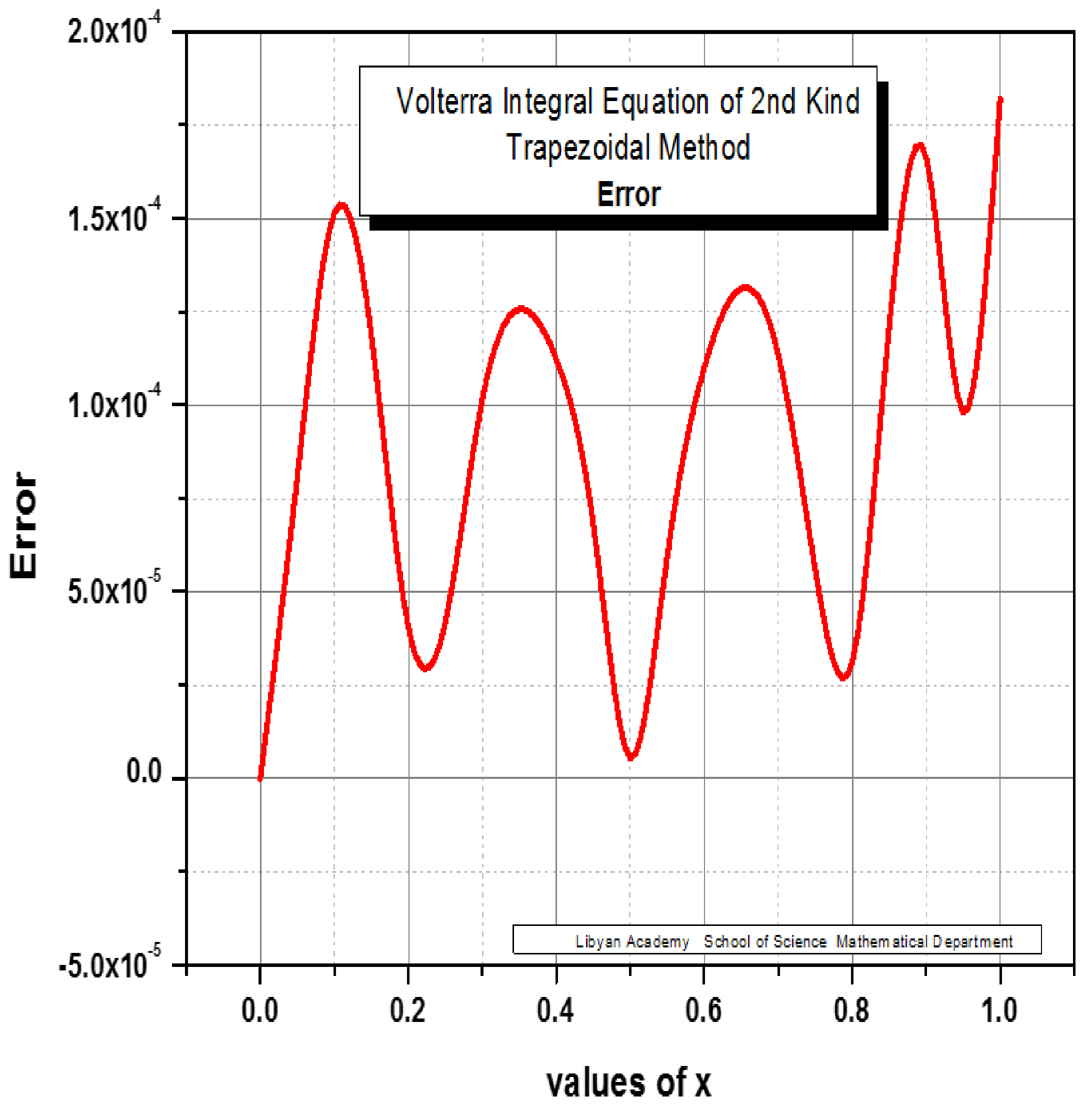
عليه باستخدام الخوارزمية 4 - 3 يمكن إيجاد الحل لمعادلة (28.4) فولتيرا التكاملية من النوع الثاني، بحيث تم استعراض النتائج العددية والحقيقية في الجدول (4 – 3) بحيث كان عدد النقاط $n = 20$ وكذلك ادراج قيمة الخطأ.

جدول (4 - 3): الحل الصحيح والعددي باستخدام خوارزمية 4 - 3 للمعادلة (28.4)

x	الحل التحليلي $\emptyset(x) = xe^{x}$	الحل التقريبي $\emptyset_h(x)$	الخطأ $E = \|\emptyset - \emptyset_h\|$
0.000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+00
0.050000	0.052563555	0.052482502	8.10531E-05
0.100000	0.110517092	0.110365618	1.51474E-04
0.150000	0.174275136	0.174156634	1.18502E-04
0.200000	0.244280552	0.244240128	4.04236E-05
0.250000	0.321006354	0.321047873	4.15186E-05
0.300000	0.404957642	0.405058838	1.01196E-04
0.350000	0.496673642	0.496799189	1.25547E-04
0.400000	0.596729879	0.596842288	1.12409E-04
0.450000	0.705740483	0.705808692	6.82083E-05
0.500000	0.824360635	0.824366154	5.51865E-06
0.550000	0.953289160	0.953229624	5.95356E-05
0.600000	1.093271280	1.093161248	1.10032E-04
0.650000	1.245101539	1.244970367	1.31172E-04
0.700000	1.409626895	1.409513518	1.13377E-04
0.750000	1.587750012	1.587694435	5.55772E-05
0.800000	1.780432743	1.780464048	3.13052E-05
0.850000	1.988699824	1.988820482	1.20658E-04
0.900000	2.213642800	2.213809058	1.66258E-04
0.950000	2.456424176	2.456522294	9.81179E-05
1.000000	2.718281828	2.718099904	1.81924E-04



الشكل (4 – 5): الحل الصحيح والعددي باستخدام خوارزمية 4 - 3 للمعادلة (28.4)



الشكل (4 – 6) نتائج الخطأ باستخدام الخوارزمية (4 – 3) للمعادلة (28.4)

4 - 4 - 2 الحل العددي باستخدام طريقة رانج - كوتا

(The Numerical solution by using Runge - Kutta method)

الخوارزمية التالية تبين استخدام **طريقة رانج - كوتا من الدرجة الرابعة** لإيجاد الحل العددي باستخدام برنامج **Matlab**.

خوارزمية 4 – 4

1- أدخال طول الفترة h، وحدود الفترة a, b، الثابت λ، نواة $k(x,y)$، $g(x)$

2- المخرجات

أ- نقاط المتغير x الذي يتم حساب قيم الحل التقريبي عنده.

ب- $\emptyset(x)$ قيم الحل الصحيح عند نقاط المتغير x.

3- تحديد الاوزان

$$theta = [0,0.5,0.5,1]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

4- المتغير x علي الفترة $[a, b]$، طول الخطوة h

5- عدد النقاط الداخلية تساوي

$$(length(nodes) - 1) * 3$$

6- x متجه النقاط العقدية والنقاط الداخلية

7- أدخال القيم العقدية للمتغير x

$$for\ i = 1\ to\ length(nodes)$$

$$x(i + 3 * (i - 1)) = nodes(i)$$

end

8- أدخال النقاط الداخلية للمتغير x

$$for\ i = 1\ to\ length(nodes) - 1$$

$for\ j = 2:4$

$x(i + 3 * (i - 1) + j - 1) = x\big(i + 3 * (i - 1)\big) + h * theta(j);$

end

end

9- دع $\emptyset(x)$ متجه قيم الحل بنفس طول x

10- ضع رتبة الطريقة $p = 4$

11- ثم نقوم بالحسابات حسب الاتي

$for\ i = 1\ to\ length\ of\ x$

$\emptyset(i) = g\big(x(i)\big)$

$m = mod(i, 4)$

$k = index(i)$

$if\ m == 2$

$v = 1$

$elsetif\ m == 3$

$v = 2$

$elseif\ m == 0$

$v = 3$

$elseif\ m == 1$

$v = 0$

end

$if\ i{\sim} = 1 \| i{\sim} = 2 \| i{\sim} = 3 \| i{\sim} = 4$

$for\ j = 1\ to\ k - 1$

$for\ \iota = 1\ to\ p$

$ind1 = gind(j == index)$

$ind1 = ind1(1)$

12- طبق صيغة رانج - كوتا

$$\emptyset(i) = \emptyset(i) + h * A(4, \iota) * kernel\left(x(i), x\big(ind1 + (\iota - 1)\big)\right) * \emptyset\big(ind1 + (\iota - 1)\big)$$

end

end

end

$if\ v{\sim} = 0$

$for\ \iota = 1\ to\ v\ (depends\ on\ mod)$

$$ind1 = gind(index(i) == index)$$

$$ind1 = ind1(1)$$

13- طبق صيغة رانج - كوتا

$$\emptyset(i) = \emptyset(i) + h * A(v, \iota) * kernel\Big(x(i), x\big(ind1 + (\iota - 1)\big)\Big) * \emptyset\big(ind1 + (\iota - 1)\big)$$

end

end

end

14- نتحصل على القيم العقدية

$$Now\ let\ \emptyset(x) = Vector\ length\ of\ nodes$$

$$for\ i = 1\ to\ length(nodes)$$

$$\emptyset(i) = \emptyset\big(i + 3 * (i - 1)\big)$$

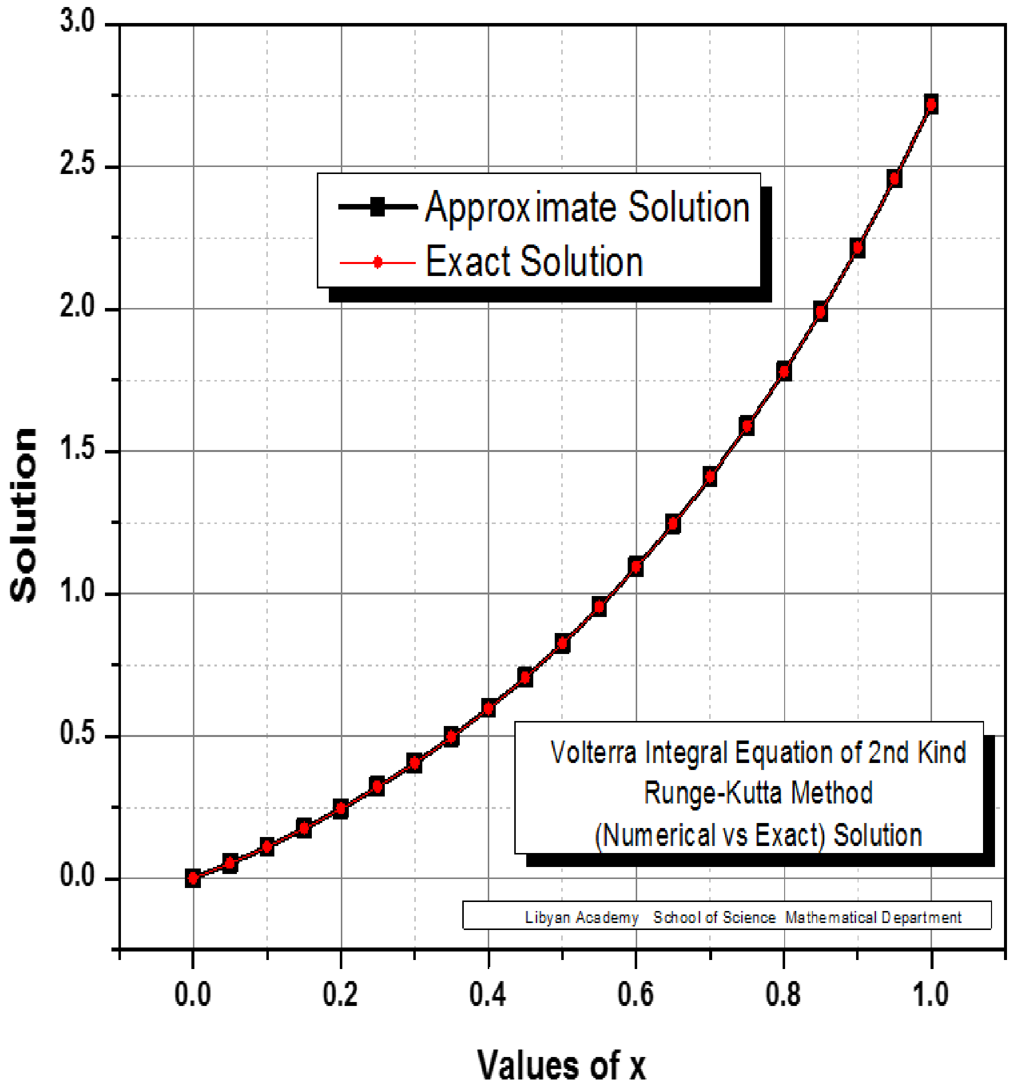
end

الجدول (4 - 4) يبين النتائج العددية والصحيحة بطول الخطوة $h = 0.05$ كما يبين أيضا قيمة الخطأ.

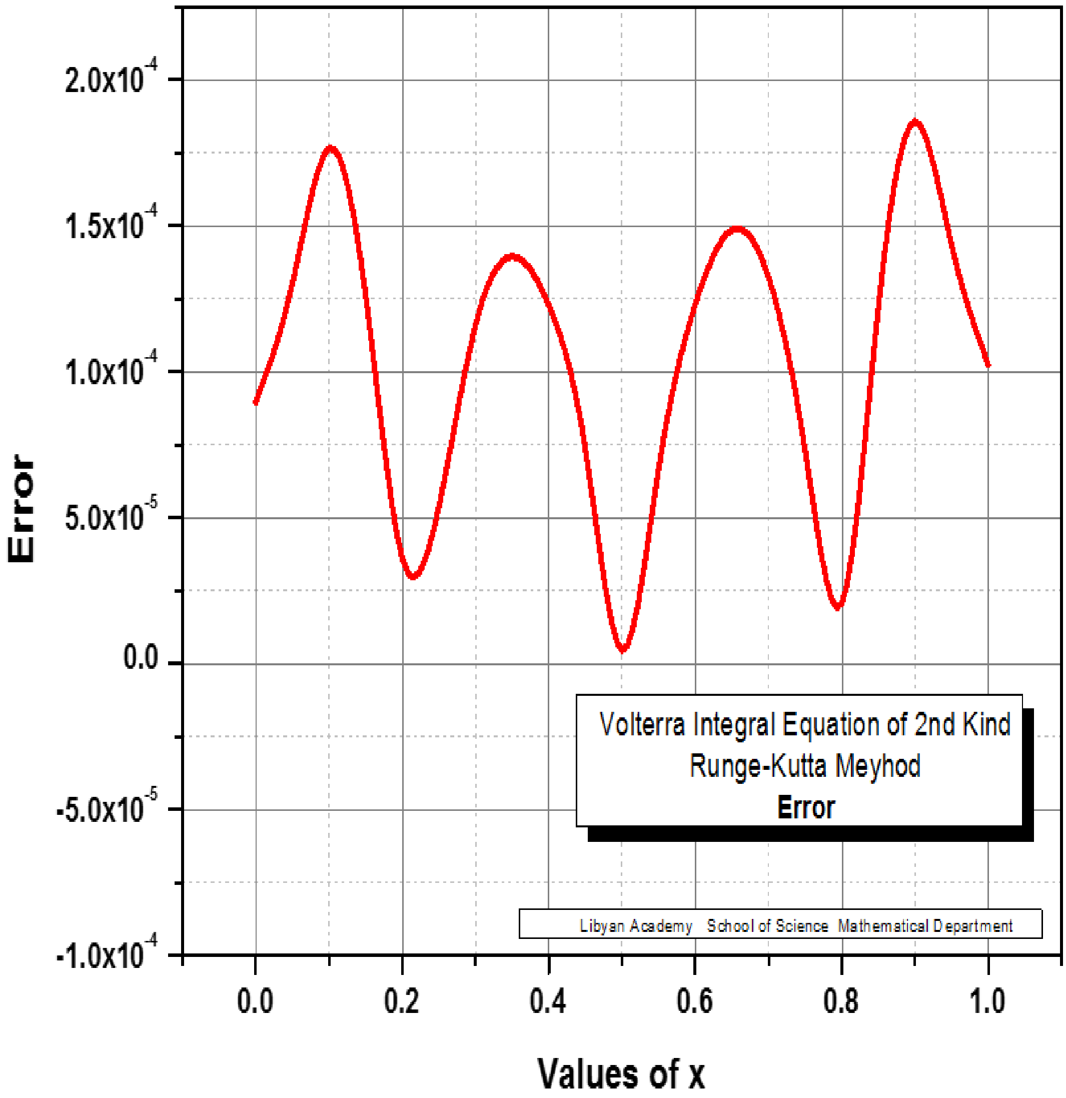
الجدول (4 - 4): الحل الصحيح والعددي باستخدام خوارزمية 4 - 4 للمعادلة (28.4).

x	الحل التحليلي $\emptyset(x) = xe^x$	الحل التقريبي $\emptyset_h(x)$	الخطأ $E = \lvert\emptyset - \emptyset_h\rvert$
0.000000	0.0000000000000000	0.0000895353000000	0.0000895353000000
0.050000	0.0525635548188012	0.0524333664875000	0.0001301883313012
0.100000	0.1105170918075650	0.1103406243000000	0.0001764675075648
0.150000	0.1742751364092420	0.1741493689875000	0.0001257674217424
0.200000	0.2442805516320340	0.2442448793000000	0.0000356723320340
0.250000	0.3210063541719350	0.3210596524875000	0.0000532983155647
0.300000	0.4049576422728010	0.4050734043000000	0.0001157620271991
0.350000	0.4966736420076400	0.4968130689875000	0.0001394269798600
0.400000	0.5967298790565080	0.5968527993000000	0.0001229202434919
0.450000	0.7057404834705760	0.7058139664875000	0.0000734830169240
0.500000	0.8243606353500640	0.8243651603000000	0.0000045249499359
0.550000	0.9532891598270680	0.9532221889875000	0.0000669708395674
0.600000	1.0932712802343100	1.0931480793000000	0.0001232009343051
0.650000	1.2451015388590300	1.2449530764875000	0.0001484623715324
0.700000	1.4096268952293300	1.4094946443000000	0.0001322509293338
0.750000	1.5877500124595100	1.5876774649875000	0.0000725474720060
0.800000	1.7804327427939700	1.7804534393000000	0.0000206965060259
0.850000	1.9886998241370900	1.9888216864875000	0.0001218623504078
0.900000	2.2136428000412600	2.2138285443000000	0.0001857442587450
0.950000	2.4564241763500500	2.4565675689875000	0.0001433926374466
1.000000	2.7182818284590500	2.7181795353000000	0.0001022931590451

هذه النتائج تبين دقة طريقة رانج - كوتا من الدرجة الرابعة



الشكل (4 – 7): الحل الصحيح والعددي باستخدام خوارزمية 4 - 4 للمعادلة (28.4)



الشكل (4 – 8) نتائج الخطأ باستخدام الخوارزمية (4 – 4) للمعادلة (28.4)

الخاتمة

Conclusion

الخاتمة

- ❖ في هذا البحث تم التطرق الي دراسة مفاهيم المعادلات التكاملية وتصنيفها حسب نوع النواة وعلاقتها بالمعادلات التفاضلية، وتطبيق بعض الطرق التحليلية لإيجاد الحل الصحيح وتم إثبات وجود الحل والوحدانية وكذلك تم دراسة بعض الطرق العددية لإيجاد الحلول التقريبية، لحل المعادلات التكاملية باستخدام أحد لغات البرمجة، كما تطرقنا الي تحليل الخطأ للمعادلات التكاملية.
- ❖ من هذه الدراسة نستنتج الاتي:
  - ✓ حلول المعادلات التكاملية له اهمية في العديد من التطبيقات العلمية.
  - ✓ يعتمد حل المعادلات التكاملية علي نوعية النواة.
  - ✓ الطرق التحليلية اثبتت وجود ووحدانية الحل.
  - ✓ يمكن تطبيق معظم الطرق العددية لايجاد الحل لهذه المعادلات.
  - ✓ النتائج العددية التقريبية أظهرت دقتها وقربها من النتائج التحليلية.
- ❖ أهم الصعوبات تمكن في حل المعادلة التكاملية الشاذة.
- ❖ نوصي بدراسة موضوع الاستقرار العددي للمعادلات التكاملية، وذلك لأهمية هذا الموضوع.

مصطلحات

Terminologies

قائمة المصطلحات العلمية

Linear independence	الاستقلال الخطي
Singular	الشاذة
Uniform dependence	ارتباط منتظم
Interpolation	الاستكمال
Parameter	البارومتر(المتغير)
Orthogonal Projection	التقدير التعامدي
Linear system	النظام الخطي
Expansion	امتداد
Reduction	اختزال
Regular Approximate	التقارب المنتظم
Analytical Solution	الحل تحليلي
Numerical Solution	الحل العددي
Approximate Solution	الحل التقريبي
Continuous solution	الحل المستمر
Exact Solution	الحل المضبوط
Unique solution	الحل وحيد

Infinite solution	الحل لانهائي
Eigen Values	القيم الذاتية
Eigen Functions	الدوال الذاتية
One-dimensional	بعد واحد
Constant	ثابت
Interval terms	حدود الفترة
Linear	خطية
Mixed Linear	خطية مختلطة
Algorithm	خوارزمية
Function unknown	دالة مجهولة
Integral function	دالة تكاملية
Degree	درجة
Rank	رتبة
Commutative	زمرة إبدالية
Power series	سلسلة القوي
Taylor series	سلسلة تايلور
Adomian Decomposition Method	طريقة التحليل لأدوميان

Variational Iteration Method	طريقة التغاير التكراري
Converting VIE To IVP	طريقة الحل بالتحويل إلى مسألة قيمة الابتدائية
Improved Euler method	طريقة أويلر المعدلة
length	طول
Recurrence Relation	علاقة التكرار
Non - linear	غير الخطية
Non - Singular	غير الشاذة
Non - Continuous	غير متصلة
Vector Space	فضاء المتجه
linear Space	فضاء خطي
Completely Space	فضاء التام
Standard Space	فضاء المعياري
Inner Product Space	فضاء الضرب الداخلي
Hilbert Space	فضاء هيلبرت
Interval	فترة
Space	فراغ
Differentiable	قابلة للاشتقاق

Extrema	قيم قصوي
Continuous	متصلة
Convergent	متقاربة
Divergent	متباعدة
Independence	مستقلة
Dependent	مرتبطة
Variable	متغير
System	منظومة
Matrix	مصفوفة
Identity matrix	مصفوفة الوحدة
Diagonal matrix	مصفوفة القطرية
Determinant	محدد
Modulus	معيار
Fundamental Sequence	متتابعة أساسية
Cauchy Sequence	متتابعة كوشي
Hamereshten Equation	معادلة هامريشتين
Urysohn Equation	معادلة يورشن

Homogeneous Equation	معادلة متجانسة
Non - Homogeneous Equation	معادلة غير متجانسة
Differential Equation	معادلة تفاضلية
Wenar-Hoefe Equation	معادلة وينر - هويف
Renoal Equation	معادلة رينوال
Cauchy Equation	معادلة كوشي
Abel Equation	معادلة آبل
Volterra – Fredholm Equation	معادلة فريدهولم - فولتيرا
Fredholm - Volterra Equation	معادلة فولتيرا – فريدهولم
Initial Value Problem	مسألة القيمة الابتدائية
Boundary Value Problem	مسألة القيمة الحدية
Bounded	محدودة
Linear Integral Operator	مؤثر التكاملي الخطي
Completely Integral Operator	مؤثر التكاملي التام
Completely Continuous Operator	مؤثر المتصل التام
Geometric Series	متسلسلة هندسية
Cauchy Schfartz Inequality	متباينة كوشي - شفارتز

Polynomial	متعددة الحدود
Fourier coefficient	معامل فورير
Orthogonal set	مجموعة متعامدة
Integral operator	معامل التكاملي
Kernel	نواة
Cauchy Kernel	نواة كوشي
Logarithm Kernel	نواة لوغاريثمية
Abel Kernel	نواة أيبل
Karliman Kernel	نواة كارلمان
Symmetric Kernel	نواة المتماثلة
Skew Symmetric Kernel	نواة ملتوية التماثل
Hilbert – Schmidt Kernel	نواة هيلبرت- شميت
Difference Kernel	نواة الفراقية
Nodes points	نقاط العقدية
Existence of solution	وجود الحل
Uniqueness of solution	وحدانية الحل

المراجع

References

قائمة المراجع والمصادر

• المراجع العربية

[1] المبروك يونس، محمد الأحمر **اساسيات الجبر الخطي** من منشورات دار الكتاب الجديد المتحدة الطبعة الاولي 2002 م.

[2] خضر حامد الأحمد **مقدمة في التحليل الدالي وتطبيقاته**، من منشورات جامعة دمشق جون وايلي وأولاده (1978).

[3] عجيلي ميلاد العجيلي **المعادلات التكاملية**، من منشورات جامعة طرابلس الطبعة الابتدائية 1435هـ - 2014م

[4] معروف بسوت **معادلات تكاملية**، من منشورات جامعة حلب الطبعة الثالثة 2007م.

• المراجع الأجنبية

[5] A. J. Jerri, **Introduction to Integral Equations with Applications,** John Wiley and Sons, INC, (1999).

[6] W. V. Lovitt, **Linear Integral Equations.** Dover publication Inc. 1950.

[7] M. A. Goldberg, **Solution Methods for Integral Equations Theory and Applications,** Plenum Press, New York and London, (1978).

[8] H. Hochstadt**, Integral Equation**, N. Y. London Nelson, 1971**.**

[9] A. M. Wazwaz**, Linear and Nonlinear Equations: methods and Applications.** Higher Education press, Beijing and Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[10] R. P. kanwal, **linear Integral Equation: Theory & Technique.** Academic press, INC, New YORK (1971)**.**

[11] P. Collins, **Differential and Integral Equations,** oxford University press Inc, New York, (2006).

[12] T.A. Burton, **Volterra Integral and Differential Equations,** 2nd Edition, Elsevier, (2005).

[13] K. Atkinson, **The Numerical solution of Integral Equations of the second kind,** the press syndicate of the University of Cambridge, United Kingdom, (1999).

[14] R. Kress, **linear Integral Equations,** Springer science ، Business media New York, 3rd edition, 2014.

[15] L. Delves and J. Mohammad, **Computational Methods for Integral Equations,** Cambridge University Press, (1988).

[16] M. Rahman, Integral Equations and their Applications, WIT, (2007).

[17] S. M. Zemyan, **The Classical Theory of Integral Equations**, Springer science + Business Media, LLC. 2012.

[18] A. Wazwaz, **A First Course in Integral Equations,** World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (1997).

[19] M. D. Raisinghania**, Integral Equations and Boundary value problems,** S. Chand company LTD, 2007**.**

[20] A. Polyanin and A. Manzhirov, **Hand Book of Integral Equation,** CRC Press LLC, (1998).

[21] H. Brunner, **Theory and numerical solution of Volterra functional integral equations,** Hong Kong Baptist University, (2010).

[22] S. Rahbar and E. Hashemizadeh, **A Computational Approach to the Fredholm Integral Equation of the Second Kind, Proceedings of the World Congress on Engineering,** VOI II, July 2-4, London, U.K., (2008).

[23] F. Mirzaee, **A computational method for solving linear Volterra integral equations**, Applied Mathematical Sciences, VOI. 6, 2012, no. 17-20, 807-814.

[24] D. Dellwo, **Accelerated Degenerate-Kernel Methods for linear Integral Equations, journal of Computational and Applied Mathematics**, 58,135-149, (1995).

[25] H. Hameed, H. Abbas and Z. Mohammad, **Taylor Series Method for Solving Linear Fredholm Integral Equation of Second Kind Using MATLAB, Jourrnal of Babylon University, Pure and Applied sciences,** no. 1, vol. 19, (2011).

[26] K. Atkinson and W. Han, **Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework,** 2^{nd} edition, Springer-Verlag, New York, (2005).

[27] Y. Ren, B. Zhang and H. Qiao, **A Simple Taylor-Series Expansion Method for a Class of Second Kind Integral Equation, Journal of Computational and Applied Mathematics** 110,15-24, (1999).

[28] A. Sidi and M. Israeli, **Quadrature Methods for Periodic Singular and Weakly Singular Fredholm Integral Equations, Mathematics and Statistics** 2,201-231, (1988).

[29] C. Baker, The **Numerical Treatment of Integral Equations,** Oxford Univ. Press, (1977).

[30] P. Linz, **Analytic and Numerical methods for volterra Equations.** SIAM, Philadelphia, (1985)**.**

[31] M. Aigo, **On The Numerical Approximation of Volterra Integral Equations of Second Kind Using Quadrature Rules,** International Journal of Advanced Scientific and Technical Research Issue 3 VOI. 1, (2013).

[32] F. Mirzaee, **Numerical Solution for Volterra Integral Equations of the First Kind Via Quadrature Rule,** Applied Mathematical Sciences, VOL. 6,2012, no. 20,969-974.

[33] H. Brunner, E. Hairer and S. P. Njersett, **Runge-kutta Theory for Volterra Integral Equations of the second kind,** Mathematics of computation vol. 39, No. 159 JULY 1982,147-163.

[34] C. Groh and M. Kelmanson, **Closed-Form Error Estimates for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the second Kind, Journal of Integral Equations and Applications**, PP. 181-192, 2009.

[35] W. Hackbusch, **Integral Equations: Theory and Numerical Treatment,** Birkhäuser Verlag, Basel, (1995).

الملاحق

Appendixes

الملحق (أ)

مبرهنة

$$\int_{a}^{x}\int_{a}^{x_n} \dots \int_{a}^{x_2}\int_{a}^{x_1} \Phi(x_1)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{a}^{x}(x-y)^{n-1}\Phi(y)\,dy$$

البرهان

لإثبات صحة علاقة المتطابقة (5.1) نعرف أولاً التفاضل تحت علامة التكامل كالآتي:

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} \emptyset\,(x,y)\,dy$$

$$= \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial\emptyset(x,y)}{\partial x}dy + \left[\emptyset\big(x,B(x)\big)\right]\frac{dB(x)}{dx} - \left[\emptyset\big(x,A(x)\big)\right]\frac{dA(x)}{dx} \quad (\text{أ}.\mathbf{1})$$

ثم نفرض التكامل

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_{a}^{x}(x-y)^{n-1}\Phi(\mathrm{y})\,\mathrm{dy} \quad (\text{أ}.\mathbf{2})$$

حيث n عدد صحيح موجب وa ثابت.

بالتفاضل بالنسبة لـx نتبع الآتي

$$\frac{d\mathrm{I}_n(x)}{\mathrm{d}x} = (n-1)\int_{a}^{x}(x-y)^{n-2}\Phi(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}$$

وعليه نحصل على العلاقة التكرارية التالية:

$$\frac{d\mathrm{I}_n(x)}{\mathrm{d}x} = (n-1)\mathrm{I}_{n-1} \quad (\text{أ}.\mathbf{3})$$

بتفاضل المعادلة (أ.3) مرة أخري نجد أن

$$\frac{d^2 \mathrm{I}_n}{\mathrm{d}x^2} = (n-1)(n-2)\mathrm{I}_{n-2} \qquad (\text{أ}.\mathbf{4})$$

بتكرار التفاضل إلى $n-1$ من المرات نحصل علي:

$$\frac{d^{n-1}\mathrm{I}_n}{\mathrm{dx}^{n-1}} = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots\big(n-(n-1)\big)\mathrm{I}_{n-(n-1)} = (n-1)!\,\mathrm{I}_1$$

وعليه نجد أن

$$\frac{d^n\mathrm{I}_n}{\mathrm{dx}^n} = (n-1)!\frac{d\mathrm{I}_1}{\mathrm{dx}} \qquad (\text{أ}.\mathbf{5})$$

نضع $n=1$ في المعادلة (أ.2) فنحصل علي:

$$I_1(x) = \int_a^x \emptyset(y)\,dy \qquad (\text{أ}.\mathbf{6})$$

بتفاضل المعادلة (أ.6) بالنسبة لـx نجد أن

$$\frac{dI_1(x)}{dx} = \Phi(x)\frac{dx}{dx} = \Phi(x) \qquad (\text{أ}.\mathbf{7})$$

بالتعويض من المعادلة (أ.7) في (أ.5) نحصل علي

$$\frac{d^nI_n}{dx^n} = (n-1)!\,\Phi(x) \qquad (\text{أ}.\mathbf{8})$$

نحاول الآن أخذ الطريق العكسي وهي التكامل.

نضع $n=1$ في المعادلة (أ.8) فنحصل علي

$$\frac{dI_1}{dx} = \Phi(x) \qquad (\text{أ}.\mathbf{9})$$

بتكامل العلاقة (أ.9):

$$I_1(x)=\int_a^x \Phi(x_1)\,dx_1$$

ثم نضع $n=2$ في معادلة (أ.8)

$$\frac{d^2\mathrm{I}_2}{dx^2}=1!\,\Phi(x)$$

بتكامل العلاقة الأخيرة:

$$\frac{d\mathrm{I}_2}{\mathrm{dx}}=\int_a^x \Phi(x_1)\,dx_1$$

$$\mathrm{I}_2(x)=\int_a^x\int_a^{x_2} \Phi(x_1)dx_1dx_2$$

ثم نضع $n=3$في المعادلة (أ.8) وبالتكامل نحصل على

$$I_3(x)=2!\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\int_a^{x_2}\int_a^{x_3} \Phi(x_1)dx_1dx_2\,dx_3$$

وعليه بتكامل العلاقة (أ.8) n من التكاملات نحصل علي:

$$\mathrm{I}_4(x)=3!\int_a^x\int_a^{x_4}\int_a^{x_3}\int_a^{x_2} \Phi(x_1)dx_1dx_2dx_3dx_4$$

$$\mathrm{I}_n=(n-1)!\int_a^x\int_a^{x_n}\dots\int_a^{x_3}\int_a^{x_2} \Phi(x_1)dx_1\dots dx_{n-1}dx_n \qquad \textbf{(أ.10)}$$

من خلال المعادلات السابقة (أ.2) و(أ.10) نحصل على المتطابقة المطلوبة (1.5).

الملحق (ب)

- **أثبات نظرية وجود ووحدانية الحل لمعادلة فريدهولم التكاملية**

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset(y)dy$$

اولاً نبرهن علي وجود الحل باستخدام طريقة التقريب المتتالي:

ليكن التقريب من الرتبة صفر للدالة $\emptyset(x)$ على النحو:

$$\emptyset_0(x) = g(x) \tag{ب.1}$$

بالتعويض في الطرف الأيمن بالمعادلة (ب.1) في معادلة (2.1) نحصل على التقريب من الرتبة الأولي للدالة $\emptyset(x)$ على الصورة:

$$\emptyset_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_0(y)dy \tag{ب.2}$$

بإعادة تكرار هذه العملية $(n+1)$ من المرات نحصل على العلاقة التالية:

$$\emptyset_{n+1}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_n(y)dy \tag{ب.3}$$

ولإجراء عملية التكرار في المعادلة (ب.3) بصورة مفصلة نأخذ التقريب من الرتبة الاولي على الصورة:

$$\emptyset_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy \tag{ب.4}$$

اما التقريب من الرتبة الثانية فيكون على النحو:

$$\emptyset_2(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy + \lambda^2 \int_a^b k(x,y) \left[\int_a^b k(y,s)g(s)ds \right] dy \quad (\text{ب}.\mathbf{5})$$

لتبسيط المعادلة (ب.5) نضع

$$k_2(x,y) = \int_a^b k(x,s)k_1(s,y)ds \quad (\text{ب}.\mathbf{6})$$

فيصبح التقريب من الرتبة الثانية على الصورة:

$$\emptyset_2(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,y)g(y)dy \quad (\text{ب}.\mathbf{7})$$

وبالمثل نستطيع الحصول على التقريب من الرتبة الثالثة على الشكل:

$$\emptyset_3(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,y)g(y)dy + \lambda^3 \int_a^b k_3(x,y)g(y)dy \quad (\text{ب}.\mathbf{8})$$

حيث تأخذ النواة $k_3(x,y)$ الصورة:

$$k_3(x,y) = \int_a^b k(x,s)k_2(s,y)ds \quad (\text{ب}.\mathbf{9})$$

بالاستمرار في نفس العملية يمكن وضع النواة على النحو:

$$k_m(x,y) = \int_a^b k(x,s)k_{m-1}(s,y)ds \quad (\text{ب}.\mathbf{10})$$

ومنها نحصل على التقريب ذي الرتبة $(n+1)$ للمعادلة التكاملية (1.2) على الصورة:

$$\emptyset_n(x) = g(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(x,y)g(y)dy \quad (\text{ب}.\mathbf{11})$$

حيث الحد $k_m(x,y)$ يسمي بالتكرار m ، بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ نحصل علي متسلسلة نيومان التي تعرف علي الصورة:

$$\emptyset(x) = \lim_{n\to\infty} \emptyset_n(x) = g(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,y)g(y)dy \qquad (\text{ب}.\mathbf{12})$$

نعيد كتابة المعادلة (ب.12) على الشكل:

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,y;\lambda)g(y)dy \qquad (\text{ب}.\mathbf{13})$$

حيث

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} k_m(x,y) \qquad (\text{ب}.\mathbf{14})$$

وتسمي $\Gamma(x,y;\lambda)$ بالنواة المنحلة (Resolvent kernel) والمعادلة (ب.13) تمثل حل المعادلة التكاملية (1.2) بطريقة التقريب المتتالي، وهذه المتسلسلة تتقارب فقط عندما λ تكون صغيرة جداً.

لتحديد شرط التقارب نلجأ الي المجموع الجزئي للمعادلة (ب.11) وتطبيق متباينة شوارتز التي تعطي بالعلاقة التالية:

$$|(\xi,\psi)| \leq \|\xi\|\|\psi\| \qquad (\text{ب}.\mathbf{15})$$

حيثξ و ψ دوال مركبة، والنظيم $\|\xi\|$ معطي بـ:

$$\|\xi\| = \left[\int_a^b \xi(y)\xi^*(y)dy\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_a^b |\xi(y)|^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{ب}.\mathbf{16})$$

وبالتالي الحد العام للمجموع الجزئي يأخذ الشكل:

$$\left|\int_{a}^{b} k_m(x,y)g(y)dy\right|^2 \le \int_{a}^{b} |k_m(x,y)|^2 \mathrm{dy} \int_{a}^{b} |g(y)|^2 \mathrm{dy} \qquad (\mathbf{17}.ب)$$

ليكنA مقياساً لـ g ويعطي بـ:

$$A^2 = \int_{a}^{b} |g(y)|^2 dy \qquad (\mathbf{18}.ب)$$

ولتكن C_m^2 ترمز للحد الأعلى للتكامل $\int_{a}^{b} |k_m(x,y)|^2 \mathrm{dy}$ وبالتالي المتباينة (ب.17) تصبح على الصورة:

$$\left|\int_{a}^{b} k_m(x,y)g(y)dy\right|^2 \le C_m^2 A^2 \qquad (9\mathbf{1}.ب)$$

لربط التقدير C_m^2 مع التقدير C_1^2 نطبق متباينة شوارتز للعلاقة (ب.10) على الشكل:

$$|k_m(x,y)|^2 \le \int_{a}^{b} |k_{m-1}(x,s)|^2 \mathrm{ds} \int_{a}^{b} |k(s,y)|^2 ds \qquad (20.ب)$$

بإجراء التكامل على العلاقة (ب.20) بالنسبة الي y نحصل:

$$\int_{a}^{b} |k_m(x,y)|^2 \mathrm{dy} \le B^2 C_{m-1}^2 \qquad (21.ب)$$

حيث

$$B^2 = \int_{a}^{b} \int_{a}^{b} |k(s,y)|^2 dsdy \qquad (22.ب)$$

المتباينة (ب.21) تبني على العلاقة التكرارية الآتية:

$$C_m^2 \le \mathrm{B}^{2m-2} \mathrm{C}_1^2 \qquad (\mathbf{23}.ب)$$

من المعادلتين (ب.19) و (ب.23) نحصل على المتباينة التالية:

$$\left|\int_a^b k_m(x,y)g(y)dy\right|^2 \leq C_1^2\, A^2\, B^{2m-2} \qquad \text{(ب.24)}$$

وبالتالي الحد العام للمجموع الجزئي في المعادلة (ب.10) يملك مقدار أقل من الكمية $AC_1|\lambda|^m B^{m-1}$ وبهذا فإن المتسلسلة اللانهائية (ب.12) تتقارب أسرع من المتسلسلة الهندسية مع النسبة الشائعة $|\lambda|B$ وبالتالي فإن:

$$|\lambda|B < 1 \qquad \text{(ب.25)}$$

هذا الشرط يضمن التقارب المنتظم لهذه المتسلسلة.

∴ أثبتنا علي وجود الحل والآن نثبت على أن الحل وحيد.

ثانياً نبرهن وحدانية الحل

لتكن لدينا المعادلة (1.2) ونعوض وجود الحلين $\emptyset_2(x), \emptyset_1(x)$ أي إن

$$\emptyset_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_1(y)dy$$

$$\emptyset_2(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_2(y)dy$$

$$\emptyset_1(x) - \emptyset_2(x) = \emptyset_0(x)$$

$$\emptyset_0(x) = \lambda \int_a^b k(x,y)\emptyset_0(y)dy \qquad \Rightarrow$$ بتطبيق متباينة كوشي شوارتز

$$|\emptyset_0(x)|^2 \leq |\lambda|^2 \int_a^b |k(x,y)|^2 dy \cdot \int_a^b |\emptyset_0(y)|^2 dy$$

وبالتكامل بالنسبة لـ x

$$\Rightarrow \int_a^b |\emptyset_0(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx \cdot dy \cdot \int_a^b |\emptyset_0(x)|^2 dy$$

$$\Rightarrow \int_a^b |\emptyset_0(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 B^2 \int_a^b |\emptyset_0(x)|^2 dy$$

نعوض $y \to x$

$$\int_a^b |\emptyset_0(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 B^2 \int_a^b |\emptyset_0(x)|^2 \, dx$$

أو

$$[1 - |\lambda|^2 B^2] \int_a^b |\emptyset_0(x)|^2 dx \leq 0$$

لكن $|\lambda| \cdot B < 1$ هذا يعني أن

$$\emptyset_0(x) = 0 \qquad \forall \qquad x \in [a, b]$$

وهو المطلوب $\emptyset_1(x) = \emptyset_2(x)$

$\therefore$ $\emptyset(x)$ حل وحيد

الملحق (ج)

- ## اثبات نظرية وجود ووحدانية الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية

$$\emptyset(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)dy$$

أولاً نبرهن علي وجود الحل باستخدام طريقة التقريب المتتابع على النحو:

$$\emptyset_0(x) = g(x) \qquad (\text{ج}.\mathbf{1})$$

والتقريب من الرتبة الأولي يأخذ الشكل:

$$\emptyset_1(x) = \emptyset_0(x) + \int_{\mathrm{a}}^x k(x,y)\emptyset_0(y)dy \qquad (\text{ج}.\mathbf{2})$$

أما التقريب من الرتبة الثانية فيكون على الصورة:

$$\emptyset_2(x) = \emptyset_0(x) + \int_{\mathrm{a}}^x k(x,y)\emptyset_1(y)dy \qquad (\text{ج}.\mathbf{3})$$

وبإعادة العمل نفسه n من المرات نحصل على العلاقة

$$\emptyset_n(x) = \emptyset_0(x) + \int_{\mathrm{a}}^x k(x,y)\emptyset_{n-1}(y)dy \qquad (\text{ج}.\mathbf{4})$$

وبالتالي نستطيع كتابة الحل على صورة متسلسلة على الشكل

$$\emptyset(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \emptyset_n(x) \qquad (\text{ج}.\mathbf{5})$$

$\emptyset(x)$ تمثل حلاً للمعادلة (2.2)، ولإثبات ذلك نعوض في تلك المعادلة عن $\emptyset(x)$ من المعادلة (ج.5) لنحصل على العلاقة التالية

$$g(x) + \int_a^x k(x,y)\emptyset(y)dy = \emptyset_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} k(x,y)\emptyset_n(y)dy \qquad (\text{ج}.\mathbf{6})$$

وباستخدام علاقة التكرار نجد أن:

$$\emptyset_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\emptyset_n(x)=\emptyset(x) \qquad (\text{ج}.7)$$

لتبرير الحساب أعلاه يجب إثبات إن الدوال $\emptyset_n(x)$ مستمرة وان $\sum \emptyset_n(x)$ متقاربة بانتظام.

حيث إن الاستمرارية لـ$\emptyset_n(x)$ تكون بديهية ومن المعلوم إن $g(x)$ مستمرة، وكذلك $\emptyset_0(x)=g(x)$ تكون مستمرة، وباستخدام المعادلة (ج.4) والاستمرارية لـ n نجد إن: $\emptyset_n(x)$ كذلك مستمرة لأي n ولنبرهن إن التقارب منتظم نفرض إن:

$$\mathrm{M}=max|g(x)| \qquad (\text{ج}.8)$$

حيث $\mathrm{a}\le \mathrm{x}\le \mathrm{b}$ وكذلك

$$\mathrm{N}=max|k(x,y)| \qquad (\text{ج}.9)$$

حيث $y\le b \quad , \quad a\le x$ ونجد من البديهي إن:

$$|\emptyset_0(x)|\le \mathrm{M} \qquad (\text{ج}.10)$$

حيث $a\le x\le b$ وبتطبيق شروط التقارب على التقريب من الرتبة الأولي نحصل علي:

$$|\emptyset_1(x)|\le \int_{\mathrm{a}}^{x}|k(x,y)||\emptyset_0(\mathrm{y})|\mathrm{dy}\le \mathrm{MN}(x-\mathrm{a}) \qquad (\text{ج}.11)$$

حيث $a\le x\le b$ وبالمثل على التقريب من الرتبة الثانية نجد إن:

$$|\emptyset_2(x)|\le \int_{\mathrm{a}}^{x}|k(x,y)||\emptyset_1(\mathrm{y})|\mathrm{dy}\le \frac{\mathrm{MN}^2}{2}(x-a)^2 \qquad (\text{ج}.12)$$

وبإعادة تكرار العملية السابقة نحصل ل $n\ge 1$ على الشكل:

$$|\emptyset_n(x)|\le \int_{\mathrm{a}}^{x}|k(x,y)||\emptyset_{n-1}(\mathrm{y})|\mathrm{dy}\le \frac{\mathrm{MN}^{n-1}}{(n-1)!}\int_{\mathrm{a}}^{x}(\mathrm{y}-\mathrm{a})^{n-1}\mathrm{dy}=\frac{mN^n}{n!}(x-a)^n \qquad (\text{ج}.13)$$

والتي نستطيع كتابتها على شكل متسلسلة تايلور كما يلي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{MN^n}{n!}(x-a)^n=\mathrm{Me}^{\mathrm{N}(x-a)} \qquad (\text{ج}.14)$$

وبالتالي يكون التقارب منتظماً، ونكون أثبتنا الوجود.

ثانياً نبرهن وحدانية الحل

نفرض إن $\emptyset(x)$ و$\psi(x)$ حلان للمعادلة (2.2) وباستخدام خاصية خطية المعادلة فإن:

$$h(x)=\emptyset(x)-\psi(x) \qquad (\text{ج}.15)$$

هو حل للمعادلة المتجانسة التالية:

$$h(x) = \int_a^x k(x,y)h(y)dy \qquad (\text{ج}.16)$$

لإثبات إن $h(x) = 0$ نقوم بالخطوات نفسها التي قمنا بها على الحل $\emptyset(x)$ لنفرض أن:

$$R = \max|h(x)| \qquad (\text{ج}.17)$$

حيث $a \le x \le b$ وباستخدام المعادلة (ج.15) نحصل على التقريب من الرتبة الأولي على الشكل:

$$|h_1(x)| \le \int_a^x |k(x,y)||h_0(\mathrm{y})|\mathrm{dy} \le \mathrm{NR}(x-a) \qquad (\text{ج}.18)$$

حيث $a \le x \le b$ وبالمثل نحصل على التقريب من الرتبة الثانية على الصورة:

$$|h_2(x)| \le \int_a^x |k(x,y)||h_1(\mathrm{y})|\mathrm{dy} \le \frac{\mathrm{RN}^2}{2}(x-a)^2 \qquad (\text{ج}.19)$$

حيث $a \le x \le b$ وبإعادة العمل نفسه n من المرات نحصل على التقريب التالي

$$|h_n(x)| \le \frac{\mathrm{RN}^n}{2}(x-a)^n \qquad (\text{ج}.20)$$

حيث $a \le x \le b$ و $n = 1,2, \dots$ وبالتالي نصل إلى إن الحل $h(x)$ موجود. وبأخذ النهاية للمتباينة (ب.20) نحصل علي:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{RN^n}{2}(x-a)^n = 0 \qquad (\text{ج}.21)$$

أي أن $h(x) = 0$ وبالتالي

$$\emptyset(x) = \psi(x) \qquad (\text{ج}.22)$$

وبذلك أثبتنا إن الحل الموجود $\emptyset(x)$ وحيد

الملحق (د)

- استخدام الماتلاب بطريقة النواة القابلة للفصل

Matlab Code for degenerate kernel Method:

```
%Degenerate kernel method using taylor series
%the problem is: phi(x)=1+ int(0,1)sin(x+y)dy
clc
clear
format long
a=0;b=pi/2;lambda=4/pi;
%The five terms of taylor series s.t
k(X,Y)=sum(i=1:m)ui(x)*vi(y)
m=5; h=(b-a)/(m-1);
u=zeros(m,m);
v=zeros(m,m);
c=zeros(m,m);
x(1)=0
for i=1:m
    v(i,1:m)=[x(i)^0; x(i);x(i)^2; x(i)^3;
x(i)^4];
u1(i)=k1(x(i));
u2(i)=k2(x(i));
u3(i)=k3(x(i));
u4(i)=k4(x(i));
u5(i)=k5(x(i));
x(i+1)=x(i)+h;
end
%WE USE THE TRAPOZOIDAL RULE TO APPROXIMATE THE
INTEGRALS
for i=1:m
    G(i)=g(x(i));
    S(i)=x(i);
    x(i+1)=x(i)+h;
```

```
end
D(1,1)=h/2;
D(m,m)=h/2;
for i=2:m-1
    D(i,i)=h;
        phi(i)=h;
end
for i=1:m
    for j=1:m
c(i,1:m)=[v(i,j)'*u1(j)'; v(i,j)'*u2(j)';
v(i,j)'*u3(j)';
v(i,j)'*u4(j)'; v(i,j)'*u5(j)'];
r(i)=v(i,j)*G(j)';
    end
end
 e=D*c;
n=r*D;
I=diag(ones(m,1),0);
lhs=I-lambda*e;
z=inv(lhs)*n';
p=G'+lambda*[u1;u2;u3;u4;u5]*z;
[u1;u2;u3;u4;u5]
k=[s',p]
pe=sin(s);
plot(s,p,'*',s,pe,'r.')
%legend('approximate','exact',4)
%THE NESTED FUNCTIONS Which related to g(x) and
ui's(x)
% #1 function g=g1(x)
%g=1;
%#2 function ker=k1(x,y)
%ker=sin(x+y);
%#3function ker=k2(x,y)
%ker=cos(x+y);
%#4function ker=k3(x,y)
%ker=(-1/2)*sin(x+y);
```

```
%#4function ker=k4(x,y)
%ker=(-1/6)*cos(x+y);
%#5function ker=k5(x,y|)
%ker=(1/24)*sin(x+y)
```

- **استخدام الماتلاب بطريقة نيستروم**

Matlab Code for Nystrom Method:

```
tic
%The Nystrum method to approximate the Fredholm
integral
equation of the
%second kind.
%the problem is phi(x)=(-
2/pi)*cos(x)+(4/pi)*int(0,pi/2)cos(x-y)phi(y)dy
clc
clear
format long
a=0 ;
b=pi/2;
lambda=4/pi;
n=70;
h=(b-a)/n;
x(n)=b;
for l=1:n-1
    x(l+1)=a+h*l;
end
G=zeros(l,n);
S=zeros(l,n);
phi=zeros(l,n);
K=zeros(l,n);
for i=l:n
    G(i)=g(x(i));
    S(i)=x(i);
for j=l:n
    K(i,j)=k(x(i),x(j));
 end
```

```
end
% we approximate the integrais using
Trapezoidrule.
for i=l:n
    D(i,i)=h;
end
I=diag(ones(n,l),0);
lhs=I-lambda*D*k;
phi=inv(lhs)*G';
 %The exact solution is phi(x)=sin(x).
 phie=sin(s);
y=[phie'-phi];
 plot(S,phi,'*',S,phie,'r.',S,y)
 plot(S,y)
 %plot(S,y)
 %legend('approximate','exact','error',4)
    disp('  S  phie    phi   y')
  [S',phie',phi,y]
 %the nested functions are
 % #1 to approernximate the kernel
 %function ker=k(x,y)
 %ker=cos(x-y);
 % #2 to approernximate the know function g(x)
 %function Ge=g(x)
 %Ge=(-2/pi)*cos(x);
 toc
```

- **استخدام الماتلاب بطريقة قاعدة شبه المنحرف**

Matlab Code for Trapezoidal rule:

```
tic
clc
clear
format long
%Composite trapezoid rule for Volterra integral
equations of the
%second kind
```

```
%Take from Atkinson, K.E. "Numerical solution of
ordinary differential
%equations", Wiley (2009)
%The problem is phi(x)=2*exp(x)-2-x+int(0,x) (x-
y)phi(y)dy
tic
clc
clear
format long
loop = 30;% This is much more than is usually
needed .
b=1;
n=20;
h = b/n;
x = linspace (0,b,n+1);
gcng=@(x) (2*exp(x)-2-x) ;
gvec = gcng(x) ;
phivec = zeros(1,n+1) ;
phivec(1) =gvec(1) ;
 for i=1:n;
    phivec(i+1) = phivec(i) ;% The initial
estimate for
the iteration.
    kvec = gcnk(x(i+1) ,x(1:i+1))
.*phivec(1:i+1);
    for j=1:loop
        %applying trapezoid rule
        phivec(i+1) = gvec(i+1) +
h*(sum(kvec(2:i)
+(kvec(1)+ kvec(i+1))/2);
      kvec(i+1)= gcnk(x(i+1) ,x(i+1))
.*phivec(i+1);
    end
 end
phi = phivec;
x = linspace(o,b,n+1);
```

```
phie=x.*exp(x);
y=(abs(phie-phi));
m=[x',phi',phie',y']
plot(x,phi,'*',x,phie,'r')
grid on
plot(x,y)
grid on
toc
```

- استخدام الماتلاب بطريقة رانج – كوتا من الدرجة الرابعة.

Matlab Code for Runge-Kutta method of order 4

```
tic
clc
clear
format long
%calculates an approximation to a volterra
Integral Equation of the second kind using the
fourth order Ruge-kutta method
% The problem is phi(x) =2*exp(x)-2-x+int(0,x)(x-
y)phi(y)dy
%specifying weights:
theta=[0,0.5,0.5,1] ;
A=[0.5,0,0,0;0,0.5,0,0;0,0,1,0; (1/6);
(1/3), (1/3), (1/6)];
a=0;
b=1;
h=.1;
nodes=a:h:b ;
num_inter_pts=(length(nodes)-1)*3; % number of
intermediate points

x=zeros(1, num_inter_pts+length(nodes)); %vector
of nodes and intermediate points
```

```
for i=1:ength(nodes) % placing node values into x
    x(i+3*(i-1))=nodes(i);
end

FOR i=1:length(nodes)-1 % placing intermediate
points into x
    for j=2:4
        x(i+3*(i-1)+j-1)=x(i+3*(i-1))+h*theta(j);
    end
index=zeros(1,length(x)); % keeps track of which
intermediate points are % associated with whch
node
for i=1:length(nodes)-1
    index(i+3*(i-1) :i+3*(i-1)+3)=i;
end
index(lendth(index))=lendth(nodes);
phi=zeros(1,length(x)); % vector of solution
values
p=4; % order of method
 g=@(x)(2*exp(x)-2-x);
FOR i=1:longth(x)
    phi(i)=g(x(i));
    m=mod(i,4);
    k=index(i);
    IF m==2
       V=1;
    ELSEIF m==3
        V=2;
    ELSEIF m==0
        v=3;
    ELSEIF m==1
        v=0;
    end
    if i~=1  i~=2  i~=3  i~=4
        for j=1:k-1
            for l=1:p
```

```
                indl= gind(j==index);
                indl=indl (1);

                %applying RK formula
                phi(i)=phi(i)+h*A (4, l)
*gcnk(x(i),
x(indl+(1-1))). *phi(indl+(1-1));
            end
        end
    end
    if V~=0
        for l=l:v %depends on mod
            indl= gind(index(i)==index);
            indl=indl(1);

            %applying RK formula
            phi(i)=phi(i)+h* A(v,l)*gcnk(x(i),
x(indl+(l-l))). *phi(indl+(l-l));
         end
    end
 end
%obtaining node values
phi2=zeros (1, length(nodes));
for i=1: length(nodes)
    phi2(i)=phi(i+3*(i-1));
end
phie=zeros (1, length(nodes));
for i=1: length(nodes)
phie(i)=x(i+3*(i-1)).*exp(x(i+3*(i-1)));
end
y=phie-phi2;

m= [nodes', phi2', phie', y']
plot (nodes, phi2,'bl*', nodes, phie,'r')
grid on
plot(nodes,y)
```

```
grid on
toc
```